

# Verwendung des CAS Maxima im Mathematikunterricht

## Programmquellen und Lizenzhinweis

wxMaxima 0.6.4 <http://wxmaxima.sourceforge.net>  
Maxima 5.9.1 <http://maxima.sourceforge.net>  
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)  
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.  
Dedicated to the memory of William Schelter.  
This is a development version of Maxima. The function `bug_report()`  
provides bug reporting information.

## Alter Wein in alten Schläuchen

### *Keine neue "Heilslehre"*

Wir verwenden Maxima als ein Werkzeug für den herkömmlichen Mathematikunterricht. Maxima ist eines der ältesten und besten Computeralgebrasysteme (das erste ist bekannt, das zweite wird behauptet).

## *Grund für die Verwendung*

### **Kosten**

Das Programm verursacht keine Kosten. Es kann aus dem Internet heruntergeladen werden. Auch von den Schüler/innen.

### **Bedienung**

Das Programm ist einfach zu bedienen.

### **Informatik**

Die Arbeit mit Maxima kann als Vorstufe der Programmierung angesehen werden. Zum Teil werden typische Informatik-Techniken verwendet: indizierte Variable, FOR-Schleifen usw. Die Programmiersprache, die dem Computeralgebrasystem zugrunde liegt, ist LISP.

## Zusätzliche Programme

### **WX-Maxima**

Das ist kein eigenes Computeralgebrasystem, nur eine verbesserte Bedieneroberfläche zu Maxima, die man unbedingt verwenden sollte.

### **GEOGEBRA**

Das geniale Programm von Markus Hohenwarter.

### **PDF-Ausgabe**

Es gibt auch brauchbare Open-Source-Produkte, z.B. den PDF-Creator.

# Mathematische Objekte

## Zahlen

- ganze Zahlen
- rationale Zahlen
- komplexe Zahlen

## Konstante

z.B. load (physconstant)

## Variable

Beispiel aus der Prozentrechnung:

```
(%i4) B:100;
(%o4) 100
(%i5) p:4;
(%o5) 4
(%i6) P:B*p/100;
(%o6) 4
```

B ist der reine Betrag

p ist der Prozentsatz

P ist der Prozentwert

## Objekte

Beispiel:

```
(%i2) "======"$
(%i3) " Nebenbedingung "$
(%i4) "======"$
(%i5) NB:x+y=10;
(%o5) y + x = 10
(%i6) solve(NB,y);
(%o6) [ y = 10 - x ]
(%i7) y(x) :=10-x;
(%o7) y(x) := 10 - x
```

Die Nebenbedingung ist ein Objekt.

## ***Funktionen***

Eine bekannte Funktion aus der Physik:

$$(\%i4) \quad s(t) := g/2 * t^2;$$

$$(\%o4) \quad s(t) := \frac{g}{2} t^2$$

s ist der Weg

t ist die Zeit

g ist die Erdbeschleunigung

Die quadratische Funktion wird so geschrieben:

$$(\%i1) \quad f(x) := a * x^2 + b * x + c;$$

$$(\%o1) \quad f(x) := a x^2 + b x + c$$

Durchschnittskosten:

$$(\%i9) \quad DK(x) := K(x) / x;$$

Durchschnittskostenfunktion

$$(\%o9) \quad DK(x) := \frac{K(x)}{x}$$

Binomialkoeffizient:

$$(\%i5) \quad c(n, k) := n! / (k! * (n - k)!);$$

$$(\%o5) \quad c(n, k) := \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

(als benutzerdefinierte Funktion, es sind mehrere Bibliotheksfunktionen ebenso verfügbar)

## ***Matrizen***

Unter WX-Maxima ist die Eingabe von Matrizen wesentlich übersichtlicher geworden. Zahlreiche Operationen für Matrizen stehen zur Verfügung.

## ***Differentialgleichungen***

### ***Iteration***

Beispiel:

$$(\%o7) \quad g(n) := x_{n+1} : x_n - \frac{f(x_n)}{a(x_n)}$$

es handelt sich um die Newton-Iteration

## Wichtige Techniken

### Terme

#### factor

Beispiel:

```
(%i8) a/b-c/d;
```

```
(%o8)  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ 
```

```
(%i9) factor(%);
```

```
(%o9)  $\frac{a d - b c}{b d}$ 
```

Ein Beispiel aus der Differentialrechnung:

```
(%o3) f(x) := u(x) v(x)
```

```
(%i4) f(x);
```

```
(%o4)  $x^5 \log(x)$ 
```

```
(%i5) ab:=diff(f(x),x);
```

```
(%o5)  $5 x^4 \log(x) + x^4$ 
```

```
(%i6) factor(ab);
```

```
(%o6)  $x^4 (5 \log(x) + 1)$ 
```

#### expand

Beispiel:

```
(%i12) factor(ab);
```

```
(%o12)  $\frac{2 x}{(x - 1)^2 (x + 1)^2}$ 
```

```
(%i13) expand(%);
```

```
(%o13)  $\frac{2 x}{x^4 - 2 x^2 + 1}$ 
```

Anwendung auf eine Gleichung:

```
(%i11) pls:pls/c;
```

```
(%o11) 
$$\frac{b^2 + a^2}{c} = \frac{c q + c p}{c}$$

```

```
(%i12) pls:expand(pls);
```

```
(%o12) 
$$\frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c} = q + p$$

```

## divide

Das ist die Polynomdivision.

## Gleichungen

### solve

Beispiel:

```
(%i1) g:x^4 + 4*x^3 + 6*x^2 + 4*x + 1 = 0;
```

```
(%o1) 
$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$$

```

```
(%i2) solve(g,x);
```

```
(%o2) [ x = - 1 ]
```

```
(%i3) realroots(g);
```

```
(%o3) [ x = - 1 ]
```

### allroots

Beispiel:

```
(%o8) 
$$x^3 - 4x^2 - 17x + 60$$

```

```
(%i9) allroots(%);
```

```
(%o9) [ x = 3.0 , x = - 4.0 , x = 5.0 ]
```

## realroots

Beispiel:

```
(%i4) f(x):=x^4-6*x^3+9*x^2-4*x;
(%o4) f(x):=x^4-6x^3+9x^2+(-4)x
(%i5) "===== "$
(%i6) solve(f(x)=0);
(%o6) [x=4, x=1, x=0]
(%i8) realroots(f(x));
(%o8) [x=1, x=4, x=0]
(%i9) "===== "$
```

## Gleichungssysteme

### solve

Beispiel:

```
(%i9) g1:g(x[1],K[1]);
(%o9) 1100.0 = d + 10 c + 100 b + 1000 a
(%i10) g2:g(x[2],K[2]);
(%o10) 1700.0 = d + 20 c + 400 b + 8000 a
(%i11) g3:g(x[3],K[3]);
(%o11) 3400.0 = d + 30 c + 900 b + 27000 a
(%i12) g4:g(x[4],K[4]);
(%o12) 6800.0 = d + 40 c + 1600 b + 64000 a
(%i13) "===== "$
(%i14) solve([g1,g2,g3,g4],[a,b,c,d]);
`rat' replaced 1100.0 by 1100//1 = 1100.0
`rat' replaced 1700.0 by 1700//1 = 1700.0
`rat' replaced 3400.0 by 3400//1 = 3400.0
`rat' replaced 6800.0 by 6800//1 = 6800.0
(%o14) [[a = 1/10, b = -1/2, c = 5, d = 1000]]
```

### algsys

Beispiel:

```
(%i15) algsys([g1,g2,g3,g4],[a,b,c,d]);
(%o15) [[a = 1/10, b = -1/2, c = 5, d = 1000]]
```

## Listenverarbeitung

### Wertetabellen

Für viele Funktionen kann man leicht Wertetabellen erstellen:

```
(%i4) x:[-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5];
(%o4) [-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]
(%i5) "===== "$
(%i6) " x ist die Definitionsmenge "$
(%i7) "===== "$
(%i8) y:x+1;
(%o8) [-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]
```

### makelist

Beispiel:

```
(%i8) f(i):=i;
(%o8) f(i) := i
(%i9) makelist(f(i),i,1,10);
(%o9) [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

### indizierte Variable

Beispiel:

```
(%i4) x:[1,2,3,4,5];
(%o4) [1, 2, 3, 4, 5]
(%i5) h:[1,3,10,3,1];
(%o5) [1, 3, 10, 3, 1]
(%i6) N:sum(h[i],i,1,5);
(%o6) 18
```

## Summen berechnen

Partialsommenfolge:

```
(%i4) f(x) := 1/2^x;
```

```
(%o4) f(x) :=  $\frac{1}{2^x}$ 
```

```
(%i7) "*****"§
```

```
(%i8) ps(n) := sum(f(x), x, 1, n);
```

Partialsommenfolge

```
(%o8) PS(n) := SUM(f(x), x, 1, n)
```

```
(%i9) "*****"§
```

Summe für 10 Glieder

```
(%i10) ps(10);
```

```
(%o10)  $\frac{1023}{1024}$ 
```

```
(%i11) %, numer;
```

```
(%o11) 0.9990234375
```

Unendliche Summe:

```
(%i19) sum(1/2^x, x, 1, INF);
```

```
(%o19)  $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x}$ 
```

```
(%i20) %, simpsum;
```

```
(%o20) 1
```

Beispiel in der Statistik:

```
(%i8) v: sum((k-m)^2*p, k, 1, n);
```

```
(%o8)  $\frac{\sum_{k=1}^n \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2}{n}$ 
```

## Grenzwertberechnung

Beispiel:

```
(%i7) f(x) := (exp(x^2) - 1) / x^2;
```

```
(%o7) f(x) :=  $\frac{\text{EXP}(x^2) - 1}{x^2}$ 
```

```
(%i8) limit(f(x), x, 0);
```

```
(%o8) 1
```

## Ableitungen bestimmen

Ein Produkt ableiten:

```
(%i4) f(x) := (5*x^3 - 4*x) * (x^2 + 5*x);
```

```
(%o4) f(x) :=  $(5x^3 - 4x)(x^2 + 5x)$ 
```

```
(%i5) ab:diff(f(x), x);
```

```
(%o5)  $(2x + 5)(5x^3 - 4x) + (x^2 + 5x)(15x^2 - 4)$ 
```

```
(%i6) expand(ab);
```

```
(%o6)  $25x^4 + 100x^3 - 12x^2 - 40x$ 
```

Bestimmung der zweiten Ableitung:

```
(%i45) ab2:diff(f(x), x, 2);
```

## Integrale berechnen

### unbestimmte Integrale

Beispiel:

```
(%i21) integrate(cos(x)^5, x);
```

```
(%o21)  $\frac{\sin(x)^5}{5} - \frac{2 \sin(x)^3}{3} + \sin(x)$ 
```

### bestimmte Integrale

Beispiel:

```
(%i8)
```

```
'integrate(exp(2*x) / (1+exp(x)), x) = integrate(exp(2*x) / (1+exp(x)), x);
```

```
(%o8)  $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = e^x - \log(e^x + 1)$ 
```

Das Hochkomma verhindert die Auswertung des Integrals

## Differentialgleichungen lösen

Beispiel:

```
(%i1) x*(x+1)*'diff(y(x),x)+(x-2)*y(x)^2=0;
```

```
(%o1) x(x+1)\left(\frac{d}{d x}y(x)\right)+(x-2)y(x)^2=0
```

```
(%i3) dg:%o1;
```

```
(%o3) x(x+1)\left(\frac{d}{d x}y(x)\right)+(x-2)y(x)^2=0
```

```
(%i4) ode2(dg,y(x),x);
```

```
(%o4) \frac{1}{y(x)}=3 \log(x+1)-2 \log(x)+ %C
```

```
(%i5) solve(%,y(x));
```

```
(%o5) [ y(x)=\frac{1}{3 \log(x+1)-2 \log(x)+ %C} ]
```

## Zusammenfassung:

- Maxima kostet nichts (auch für die Schülerinnen und Schüler)
- Maxima ist leistungsfähig
- Maxima ist einfach zu bedienen