

Das Computeralgebrasystem Maxima im Mathematikunterricht der Handelsakademie

VON JOHANN WEILHARTER

Bundeshandelsakademie A-5580 Tamsweg
johnny.weilharter@sbg.at

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
Vorbemerkungen	4
Maxima als Rechenmaschine	4
Bruchrechnen	4
Ebene Geometrie	5
Quadrat	5
Rechteck	5
Rechtwinkeliges Dreieck	6
Geometrie im Raum	6
Würfel	6
Quader	6
Kugel	7
Zylinder	7
Wirtschaftsrechnen	8
Prozentrechnen	8
Einfache Zinsenrechnung nach der Tagesformel	8
Grundlagen der Mathematik	9
Rechnen mit Termen	9
Binomische Formeln	9
Erster Hinweis auf das Thema „Binomialkoeffizienten“	10
Faktorenzerlegung	11
Polynomdivision	12
Boolesche Algebra	12
Mengenlehre	12
Aussagenlogik	13

Ereignisalgebra am Beispiel eines Würfels	14
Polynomgleichungen	15
Lineare Gleichungen	15
Quadratische Gleichungen	16
Polynomgleichungen höheren Grades	16
Gleichungssysteme	18
2 Gleichungen mit 2 Unbekannten	18
Spezielle Lösung	18
Allgemeine Lösung	18
3 Gleichungen mit 3 Unbekannten	19
Spezielle Lösung	19
Allgemeine Lösung	19
Ein Beispiel für die Lösung mit der Matrizenmethode	19
Interaktive Maximaberechnungen	21
Funktionen	23
Schreibweise	23
Wertetabellen	23
Koeffizienten einer Geradengleichung (lineare Funktion!)	24
Matrizenrechnung	25
Verwendung von wxMaxima zur Eingabe	25
Übersicht	25
Determinanten	27
Finanzmathematik	27
Einfache Zinsen	27
Tagesformel	27
Monatsformel	27
Zinseszinsrechnung	28
Bezeichnungen	28
Endkapital berechnen	28
Anfangskapital berechnen	29
Zinssatz berechnen	29
Laufzeit berechnen	30
Rentenrechnung	30
Endwert einer nachschüssigen Rente	30
Barwert einer nachschüssigen Rente	31
Endwert einer vorschüssigen Rente	31
Barwert einer vorschüssigen Rente	31
Abbildungsverzeichnis	32
Tabellenverzeichnis	33

Vorbemerkungen

Der Lehrplan 2004 für das Fach „Mathematik und angewandte Mathematik“ für die österreichischen Handelsakademien fordert in jedem Jahrgang den Einsatz von IT-Mitteln und zwar wahlweise Computeralgebrasyteme, Tabellenkalkulationsprogramme oder grafikfähige Taschenrechner. Wir haben uns nach Einführung einer Lernplattform für das Programm Maxima von <http://maxima.sourceforge.net> entschieden. Dieses sehr leistungsfähige Programm kann kostenlos aus dem Internet heruntergeladen werden. Die Bedienung dieses Programmes ist durch Integration der Benutzeroberfläche wxMaxima sehr einfach geworden. Dieses Skriptum ist mit einer Knoppix DVD 5.2 mit dem Programm GNU-TexMacs geschrieben. Fallweise wird auch Tabellenkalkulation eingesetzt. Die Verwendung von Taschenrechnern betrachte ich nicht mehr als sehr wünschenswert (in unserer Schule haben alle Schülerinnen und Schüler Computer zur Verfügung, auch zu Hause).

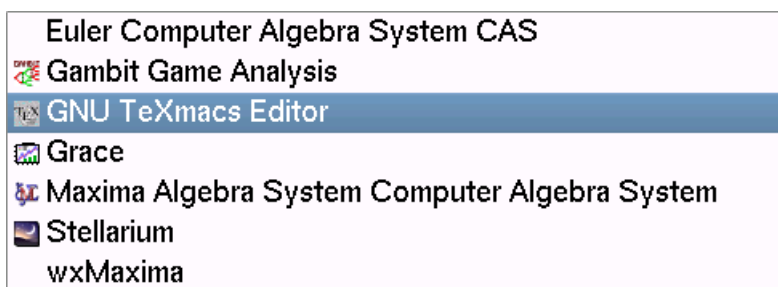


Abbildung 1. Das Programm auf der Knoppix 5.2 DVD

Maxima als Rechenmaschine

Bruchrechnen

(%i1) $1/2+1/3+1/4$

(%o1) $\frac{13}{12}$

(%i2) $3/4*7/5$

(%o2) $\frac{21}{20}$

(%i3) $3/4/7/5$

(%o3) $\frac{3}{140}$

(%i4)

Erklärung:

+	Addition
-	Subtraktion
*	Multiplikation
/	Division

Tabelle 1. Grundrechenarten

Ebene Geometrie

Quadrat

```
(%i4) a:4
(%o4) 4
(%i5) F:a**2
(%o5) 16
(%i6) U:4*a
(%o6) 16
(%i7) d:a*sqrt(2)
(%o7) 4*sqrt(2)
(%i8) %,numer
(%o8) 5.656854249492381
(%i9)
```

Erklärung

:	Wertzuweisung an einen Bezeichner. Das ist eine empfehlenswerte Technik.
%	Das letzte Zwischenergebnis verwenden (hier identisch mit %o7).

Tabelle 2. Gespeicherte Werte und Objekte

Rechteck

```
(%i9) kill(all)
(%o0) done
(%i1) a:5
(%o1) 5
(%i2) b:4
(%o2) 4
(%i3) F:a*b
(%o3) 20
(%i4) U:2*(a+b)
(%o4) 18
(%i5) d:sqrt(a**2+b**2)
(%o5) sqrt(41)
(%i6) %,numer
(%o6) 6.403124237432849
(%i7)
```

Erklärung

kill(all)	Alle Bezeichner, Objekte, Variablen usw. löschen
sqrt()	Quadratwurzel (squareroot)
numer	Darstellung als Fließkommazahl

Tabelle 3. Zahlendarstellung

Rechtwinkeliges Dreieck

```
(%i7) kill(all)
(%o0) done
(%i1) a:3
(%o1) 3
(%i2) b:4
(%o2) 4
(%i3) c:sqrt(a**2+b**2)
(%o3) 5
(%i4) U:a+b+c
(%o4) 12
(%i5) F:a*b/2.0
(%o5) 6.0
(%i6)
```

Geometrie im Raum

Würfel

```
(%i7) kill(all)
(%o0) done
(%i1) a:3
(%o1) 3
(%i2) V:a**3
(%o2) 27
(%i3) O:6*a**2
(%o3) 54
(%i4) d:a*sqrt(2)
(%o4)  $3\sqrt{2}$ 
(%i5) D:a*sqrt(3)
(%o5)  $3\sqrt{3}$ 
(%i6)
```

Quader

```
(%i6) kill(all)
(%o0) done
(%i1) a:5
(%o1) 5
```

```

(%i2) b:4
(%o2) 4
(%i3) c:3
(%o3) 3
(%i4) V:a*b*c
(%o4) 60
(%i5) O:2*(a*b+a*c+b*c)
(%o5) 94
(%i6) d:sqrt(a**2+b**2)
(%o6)  $\sqrt{41}$ 
(%i7) D:sqrt(a**2+b**2+c**2)
(%o7)  $5\sqrt{2}$ 
(%i8)

```

Anmerkung 1. Es wird zwischen groß- und kleingeschriebenen Variablen unterschieden!

Kugel

```

(%i8) r:10
(%o8) 10
(%i9) V:4*r**3*pi/3
(%o9)  $\frac{4000\pi}{3}$ 

```

Erklärung:

%pi	Kreiszahl
%e	Eulersche Zahl
%i	Imaginäre Einheit

Tabelle 4. Besondere Zahlen

Zylinder

```

(%i11) r:5
(%o11) 5
(%i12) h:10
(%o12) 10
(%i13) V:r**2*pi*h
(%o13)  $250\pi$ 
(%i14) O:2*r**2*pi+2*r*pi*h
(%o14)  $150\pi$ 
(%i15)

```

Wirtschaftsrechnen

Prozentrechnen

```
(%i15) B:100
(%o15) 100
(%i16) p:3
(%o17) 3
(%i18) P:B*p/100.0
(%o18) 3.0
(%i19) kill(all)
(%o0) done
(%i1) P:6
(%o1) 6
(%i2) p:3
(%o2) 3
(%i3) B:P*100.0/p
(%o3) 200.0
(%i4) kill(all)
(%o0) done
(%i1) B:300
(%o1) 300
(%i2) P:9
(%o2) 9
(%i3) p:P*100.0/B
(%o3) 3.0
(%i4)
```

Einfache Zinsenrechnung nach der Tagesformel

```
(%i4) kill(all)
(%o0) done
(%i1) K:1000
(%o1) 1000
(%i2) p:5
(%o2) 5
(%i3) t:180
(%o3) 180
(%i4) Z:K*p*t/36000.0
(%o4) 25.0
(%i5) kill(all)
(%o0) done
```

```
(%i1) Z:25
(%o1) 25
(%i2) p:5
(%o2) 5
(%i3) t:180
(%o3) 180
(%i4) K:Z*36000.0/(p*t)
(%o4) 1000.0
(%i5)
```

Anmerkung 2. Im Vergleich zur Arbeit mit einem Taschenrechner, erscheint mir hier der Vorteil eines wesentlich höheren Dokumentationsgrades gegeben zu sein („was wurde eingetippt?“).

Grundlagen der Mathematik

Rechnen mit Termen

Binomische Formeln

Einen wichtigen Stellenwert haben im 2. Jahrgang die binomischen Formeln.

```
(%i1) (a+b)**2
(%o4) (b+a)2
(%i5) expand(%)
(%o5) b2+2 a b+a2
(%i6) (a-b)**2
(%o6) (a-b)2
(%i7) expand(%)
(%o7) b2-2 a b+a2
(%i8) (a+b)*(a-b)
(%o8) (a-b)(b+a)
(%i9) expand(%)
(%o9) a2-b2
(%i10) (a+b)**3
(%o10) (b+a)3
(%i11) expand(%)
(%o11) b3+3 a b2+3 a2 b+a3
(%i12) (a-b)**3
(%o12) (a-b)3
(%i13) expand(%)
(%o13) -b3+3 a b2-3 a2 b+a3
```

(%i14)

Erklärung:

expand	ausmultiplizieren, ausrechnen
--------	-------------------------------

Tabelle 5. Bedeutung von expand

Erster Hinweis auf das Thema „Binomialkoeffizienten“

(%i5) kill(all)

(%o0) done

(%i1) (a+b)**0=binomial(0,0)

(%o4) 1 = 1

(%i5) (a+b)**1=binomial(1,0)*a+binomial(1,1)*b

(%o5) b + a = b + a

(%i6) (a+b)**2=binomial(2,0)*a**2+binomial(2,1)*a*b+binomial(2,2)*b**2

(%o6) (b + a)² = b² + 2 a b + a²

(%i7) (a+b)**3=sum(binomial(3,k)*a**(3-k)*b**k,k,0,3)

(%o7) (b + a)³ = b³ + 3 a b² + 3 a² b + a³

(%i8) muster:(a+b)**n=sum(binomial(n,k)*a**(n-k)*b**k,k,0,n)

(%o8) $(b + a)^n = \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \binom{n}{k}$

(%i9) muster,n=0

(%o9) 1 = 1

(%i10) muster,n=1

(%o10) b + a = b + a

(%i11) muster,n=2

(%o11) (b + a)² = b² + 2 a b + a²

(%i12) muster,n=3

(%o12) (b + a)³ = b³ + 3 a b² + 3 a² b + a³

(%i13) muster,n=4

(%o13) (b + a)⁴ = b⁴ + 4 a b³ + 6 a² b² + 4 a³ b + a⁴

(%i14) muster,n=5

(%o14) (b + a)⁵ = b⁵ + 5 a b⁴ + 10 a² b³ + 10 a³ b² + 5 a⁴ b + a⁵

(%i15)

Erklärung:

muster,n=1	für n wird der Wert 1 zugewiesen
sum(k,k,1,4)	1+2+3+4 (Summe)
binomial(n,k)	n über k, Binomialkoeffizient

Tabelle 6. Pascalsches Dreieck

Dieser Zusammenhang führt auf das sogenannte Pascalsche Dreieck

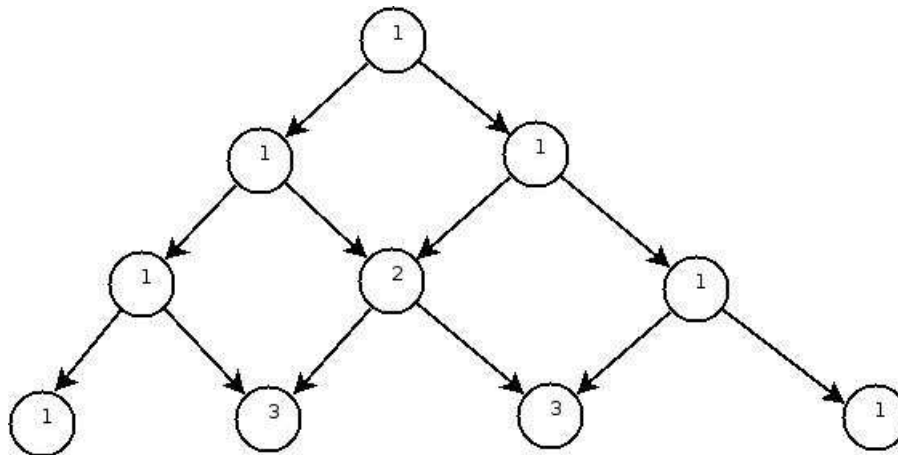


Abbildung 2. Der Beginn des Pascalschen Dreiecks

Anmerkung 3. Das soll natürlich auch ohne CAS bearbeitet werden können, aber nützlich ist die CAS-Anwendung auch :-).

Faktorenzerlegung

(%i14) `t1:a*x+a*y`

(%o14) $ay + ax$

(%i15) `factor(t1)`

(%o15) $a(y + x)$

(%i16) `t2:x**2-8*x+15`

(%o16) $x^2 - 8x + 15$

(%i17) `factor(t2)`

(%o17) $(x - 5)(x - 3)$

(%i18) `t3:x**2-8*x+16`

(%o18) $x^2 - 8x + 16$

(%i19) `factor(t3)`

(%o19) $(x - 4)^2$

(%i20) `t4:x**2-8*x+17`

(%o20) $x^2 - 8x + 17$

(%i21) `factor(t4)`

(%o21) $x^2 - 8x + 17$

(%i22) `t5:x**3-3*x**2+3*x-1`

(%o23) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

(%i24) `factor(t5)`

(%o24) $(x - 1)^3$

(%i25)

Erklärung

factor()	in Faktoren zerlegen
----------	----------------------

Tabelle 7. Faktorzerlegung

Der Zusammenhang der Faktorenerlegung mit der Lösung von Gleichungen ist zu beachten (Bestimmung der Nullstellen von Polynomfunktionen).

Polynomdivision

Anmerkung 4. Bei der Polynomdivision kann man die aufwendigen Rechenübungen sicherlich etwas zurücknehmen.

```
(%i25) p1:x**3-3*x**2+3*x+1
```

```
(%o25) x3 - 3x2 + 3x + 1
```

```
(%i26) p2:x**2-2*x+1
```

```
(%o26) x2 - 2x + 1
```

```
(%i27) divide(p1,p2)
```

```
(%o27) [x - 1, 2]
```

```
(%i28)
```

Erklärung:

divide	Polynomdivision
--------	-----------------

Tabelle 8. Polynomdivision

Boolesche Algebra

Es gibt im Unterricht der Handelsakademie drei Ausprägungen:

- Mengenlehre
- Aussagenlogik
- Ereignisalgebra

Mengenlehre

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

$$A' = \{x | x \notin A\}$$

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

```
(%i28) A:{1,2,3,4,5}
```

```
(%o28) {1, 2, 3, 4, 5}
```

```
(%i29) B:{4,5,6,7}
```

```
(%o29) {4, 5, 6, 7}
```

```

(%i30) Durchschnitt:intersection(A,B)
(%o30) {4,5}
(%i31) Vereinigung:union(A,B)
(%o31) {1,2,3,4,5,6,7}
(%i32) Mengendifferenz1:setdifference(A,B)
(%o35) {1,2,3}
(%i36) Mengendifferenz2:setdifference(B,A)
(%o36) {6,7}
(%i37) Potenzmenge1:powerset(A)
(%o38) {{}, {1}, {1,2}, {1,2,3}, {1,2,3,4}, {1,2,3,4,5}, {1,2,3,5}, {1,2,4}, {1,2,4,5}, {1,2,5}, {1,3}, {1,3,4}, {1,3,4,5}, {1,3,5}, {1,4}, {1,4,5}, {1,5}, {2}, {2,3}, {2,3,4}, {2,3,4,5}, {2,3,5}, {2,4}, {2,4,5}, {2,5}, {3}, {3,4}, {3,4,5}, {3,5}, {4}, {4,5}, {5}}
(%i39) Potenzmenge2:powerset(B)
(%o39) {{}, {4}, {4,5}, {4,5,6}, {4,5,6,7}, {4,5,7}, {4,6}, {4,6,7}, {4,7}, {5}, {5,6}, {5,6,7}, {5,7}, {6}, {6,7}, {7}}
(%i40) Maechtigkeit:cardinality(A)
(%o40) 5
(%i41) Produktmenge1:cartesian_product(A,B)
(%o41) {[1,4],[1,5],[1,6],[1,7],[2,4],[2,5],[2,6],[2,7],[3,4],[3,5],[3,6],[3,7],[4,4],[4,5],[4,6],[4,7],[5,4],[5,5],[5,6],[5,7]}
(%i42) Produktmenge2:cartesian_product(B,A)
(%o42) {[4,1],[4,2],[4,3],[4,4],[4,5],[5,1],[5,2],[5,3],[5,4],[5,5],[6,1],[6,2],[6,3],[6,4],[6,5],[7,1],[7,2],[7,3],[7,4],[7,5]}
(%i43)

```

Erklärung:

intersection()	Durchschnittsmenge
union()	Vereinigungsmenge
setdifference()	Differenzmenge
powerset()	Potenzmenge
cartesian_product()	Produktmenge
cardinality()	Mächtigkeit

Tabelle 9. Mengenlehre

Aussagenlogik

Es stehen jedenfalls die Negation (Verneinung), die Konjunktion (Und-Verknüpfung) und die Disjunktion (Oder-Verknüpfung) zur Verfügung. Die Konjunktion ist nur wahr, wenn alle Teilaussagen wahr sind. Die Disjunktion ist nur falsch, wenn alle Teilaussagen falsch sind.

```

(%i43) a1:true
(%o43) true
(%i44) a2:not(a1)

```

```

(%o44) false
(%i45) b1:true
(%o45) true
(%i46) b2:not(b1)
(%o46) false
(%i47) c1:a1 and b1
(%o48) true
(%i49) c2:a1 and b2
(%o49) false
(%i50) c3:a2 and b1
(%o50) false
(%i51) c4:a2 and b2
(%o51) false
(%i52) d1:a1 or b1
(%o52) true
(%i53) d2:a1 or b2
(%o53) true
(%i54) d3:a2 or b1
(%o54) true
(%i55) d4:a2 or b2
(%o55) false
(%i56)

```

Erklärung:

true, false	Wahrheitswerte
not	Negation
and	Konjunktion
or	Disjunktion

Tabelle 10. Aussagenlogik

Anmerkung 5. Für die in der Unterrichtspraxis sehr häufig beliebte Tätigkeit „Wahrheitstafeln erstellen“ kann auf Anfrage ein Unterprogramm zur Verfügung gestellt werden.

Ereignisalgebra am Beispiel eines Würfels

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine gerade Zahl?

```

(%i2) S:{1,2,3,4,5,6}
(%o2) {1, 2, 3, 4, 5, 6}
(%i3) moeglich:cardinality(S)
(%o3) 6
(%i4) gerade_Zahl:subset(S,lambda([e],is(mod(e,2)=0)))

```

```
(%o4) {2, 4, 6}
(%i5) guenstig:cardinality(gerade_Zahl)
(%o5) 3
(%i6) waerscheinlichkeit:guenstig/moeglich
(%o6) 1/2
(%i7)
```

Erklärung:

subset()	Teilmenge
lambda()	ist eine Pseudofunktion
mod()	modulo-Funktion (bestimmt den Rest bei der Division)

Tabelle 11. Mengenlehre

Anmerkung 6. Für die Bildung von Teilmengen ist die Pseudofunktion lambda() von Nutzen.

Polynomgleichungen

Polynomgleichungen können auch mit allroots() und realroots() gelöst werden (nur spezielle Lösungen)

Lineare Gleichungen

```
(%i62) g1:g1,a=1,b=2
(%o63) x + 2 = 0
(%i64) realroots(g1)
(%o64) [x = - 2]
(%i65) allroots(g1)x
(%o65) [x = - 2.0]
(%i66) g2:g2,a=1,b=2,c=3
(%o66) x + 2 = 3
(%i67) realroots(g2)
(%o67) [x = 1]
(%i68) allroots(g2)
(%o68) [x = 1.0]
(%i69)
```

Erklärung:

realroots()	bestimmt nur die reellen Nullstellen einer Polynomfunktion
allroots()	bestimmt alle Lösungen einer Polynomfunktions-Gleichung

Tabelle 12. Nullstellen (Lösungen) von Polynomgleichungen

Quadratische Gleichungen

```
(%i69) g:a*x**2+b*x+c=0
(%o69) a x2 + b x + c = 0
(%i70) solve(g,x)
(%o70)  $\left[ x = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} + b}{2a}, x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a} \right]$ 
(%i71) g1:g,a=1,b=-8,c=15
(%o71) x2 - 8x + 15 = 0
(%i72) g2:g,a=1,b=-8,c=16
(%o72) x2 - 8x + 16 = 0
(%i73) g3:g,a=1,b=-8,c=17
(%o73) x2 - 8x + 17 = 0
(%i74) realroots(g1)
(%o74) [x = 3, x = 5]
(%i75) realroots(g2)
(%o75) [x = 4]
(%i76) realroots(g3)
(%o76) []
(%i77) allroots(g1)
(%o77) [x = 3.0, x = 5.0]
(%i78) allroots(g2)
(%o78) [x = 4.0, x = 4.0]
(%i79) allroots(g3)
(%o79) [x = 1.0i + 4.0, x = 4.0 - 1.0i]
(%i80)
```

Die Darstellung mit wxMaxima ist sehr ähnlich (nur wird die Bedienung wesentlich einfacher):

```
(%i1) g1:a*x**2+b*x+c=0;
(%o1) a x2 + b x + c = 0
(%i2) solve(g1,x);
(%o2)  $\left[ x = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} + b}{2a}, x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a} \right]$ 
```

Abbildung 3. Allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung mit wxMaxima

Polynomgleichungen höheren Grades

Allgemeine Lösungen sind sehr komplex!

(%i80) `g:a*x**3+b*x**2+c*x+d=0`

(%o82) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

(%i83) `solve(g,x)`

$$\left[x = \left(-\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{6\sqrt{3}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) (3ac - b^2)}{9a^2 \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{6\sqrt{3}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{3a}, x = \left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{6\sqrt{3}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) (3ac - b^2)}{9a^2 \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{6\sqrt{3}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{3a}, x = \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{6\sqrt{3}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{3ac - b^2}{9a^2 \left(\frac{\sqrt{27a^2d^2 + (4b^3 - 18abc)d + 4ac^3 - b^2c^2}}{6\sqrt{3}a^2} - \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{54a^3} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{3a} \right]$$

(%i84) `g1:g,a=1,b=-2,c=3,d=-4`

(%o84) $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$

(%i85) `solve(g1,x)`

$$\left[x = -\frac{5 \left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right)}{9 \left(\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{35}{27} \right)^{\frac{1}{3}}} + \left(\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{35}{27} \right)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3}, x = \left(\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{35}{27} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{5 \left(-\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \right)}{9 \left(\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{35}{27} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{3}, x = \left(\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{35}{27} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{5}{9 \left(\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{35}{27} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{3} \right]$$

(%i86) `%,numer`

(%o86) $[x = -0.40110390605774(0.86602540378444i - 0.5) + 1.385066430830464(-0.86602540378444i - 0.5) + 0.666666666666667, x = 1.385066430830464(0.86602540378444i - 0.5) - 0.40110390605774(-0.86602540378444i - 0.5) + 0.666666666666667, x = 1.650629191439388]$

(%i87) `realroots(g1)`

(%o87) $\left[x = \frac{55385925}{33554432} \right]$

(%i88) `%,numer`

```
(%o88) [x = 1.650629192590714]
```

```
(%i89) allroots(g1)meine
```

```
(%o89) [x = 1.546868887231396 i + 0.17468540428031, x = 0.17468540428031 - 1.546868887231396 i, x = 1.650629191439388]
```

```
(%i90)
```

Gleichungssysteme

2 Gleichungen mit 2 Unbekannten

Spezielle Lösung

```
(%i90) g1:x+y=5
```

```
(%o90) y + x = 5
```

```
(%i91) g2:x-y=-1
```

```
(%o91) x - y = -1
```

```
(%i92) solve([g1,g2],[x,y])
```

```
(%o92) [[x = 2, y = 3]]
```

```
(%i93) algsys([g1,g2],[x,y])
```

```
(%o93) [[x = 2, y = 3]]
```

```
(%i94)
```

Die grafische Lösung dieses Gleichungssystems mit Geogebra:

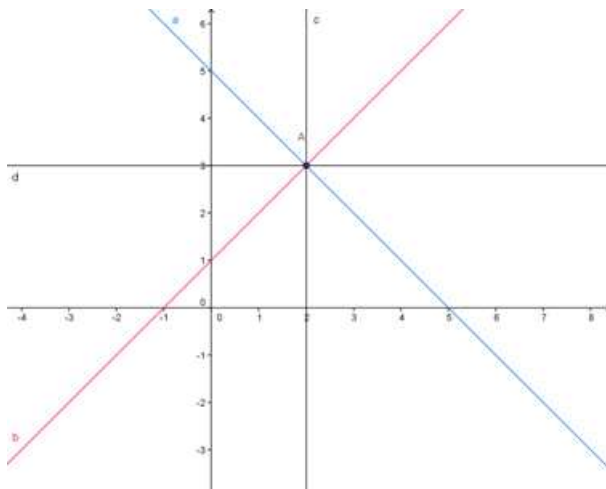


Abbildung 4. grafische Lösung mit Geogebra

Anmerkung 7. Gleichungssysteme können mit solve() oder algsys() gelöst werden

Allgemeine Lösung

```
(%i105) g1:a*x+b*y=c
```

```
(%o105) b y + a x = c
```

```
(%i106) g2:d*x+e*y=f
(%o106) e y + d x = f
(%i107) solve([g1,g2],[x,y])
(%o107) [[x = -\frac{c e - b f}{b d - a e}, y = \frac{c d - a f}{b d - a e}]]
(%i108)
```

3 Gleichungen mit 3 Unbekannten

Spezielle Lösung

```
(%i94) g1:x+y+z=3
(%o94) z + y + x = 3
(%i95) g2:3*x-4*y+2*z=1
(%o95) 2 z - 4 y + 3 x = 1
(%i96) g3:-3*x+y-4*z=-6
(%o96) -4 z + y - 3 x = -6
(%i97) solve([g1,g2,g3],[x,y,z])
(%o97) [[x = 1, y = 1, z = 1]]
(%i98) algsys([g1,g2,g3],[x,y,z])
(%o98) [[x = 1, y = 1, z = 1]]
(%i99)
```

Allgemeine Lösung

```
(%i99) g1:a[1,1]*x+a[1,2]*y+a[1,3]*z=b[1]
(%o102) a_{1,3} z + a_{1,2} y + a_{1,1} x = b_1
(%i103) g2:a[2,1]*x+a[2,2]*y+a[2,3]*z=b[2]
(%o101) a_{2,3} z + a_{2,2} y + a_{2,1} x = b_2
(%i102) g3:a[3,1]*x+a[3,2]*y+a[3,3]*z=b[3]
(%o103) a_{3,3} z + a_{3,2} y + a_{3,1} x = b_3
(%i104) solve([g1,g2,g3],[x,y,z])
(%o104) [[x = \frac{b_1 (a_{2,3} a_{3,2} - a_{2,2} a_{3,3}) + a_{1,2} (b_2 a_{3,3} - a_{2,3} b_3) + a_{1,3} (a_{2,2} b_3 - b_2 a_{3,2})}{a_{1,1} (a_{2,3} a_{3,2} - a_{2,2} a_{3,3}) + a_{1,2} (a_{2,1} a_{3,3} - a_{2,3} a_{3,1}) + a_{1,3} (a_{2,2} a_{3,1} - a_{2,1} a_{3,2})}, y = -\frac{b_1 (a_{2,3} a_{3,1} - a_{2,1} a_{3,3}) + a_{1,1} (b_2 a_{3,3} - a_{2,3} b_3) + a_{1,3} (a_{2,1} b_3 - b_2 a_{3,1})}{a_{1,1} (a_{2,3} a_{3,2} - a_{2,2} a_{3,3}) + a_{1,2} (a_{2,1} a_{3,3} - a_{2,3} a_{3,1}) + a_{1,3} (a_{2,2} a_{3,1} - a_{2,1} a_{3,2})}, z = \frac{b_1 (a_{2,2} a_{3,1} - a_{2,1} a_{3,2}) + a_{1,1} (b_2 a_{3,2} - a_{2,2} b_3) + a_{1,2} (a_{2,1} b_3 - b_2 a_{3,1})}{a_{1,1} (a_{2,3} a_{3,2} - a_{2,2} a_{3,3}) + a_{1,2} (a_{2,1} a_{3,3} - a_{2,3} a_{3,1}) + a_{1,3} (a_{2,2} a_{3,1} - a_{2,1} a_{3,2})}]]
(%i105)
```

Ein Beispiel für die Lösung mit der Matrizenmethode

```
(%i108) g1:x+y+z=3
(%o108) z + y + x = 3
```

```

(%i109) g2: -4*x+2*y-3*z=-5
(%o109) -3z+2y-4x=-5
(%i110) g3: 2*x-5*y+3*z=0
(%o110) 3z-5y+2x=0
(%i111) A:coefmatrix([g1,g2,g3],[x,y,z])
(%o112)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ 
(%i113) b:[rhs(g1),rhs(g2),rhs(g3)]
(%o113) [3,-5,0]
(%i114) x:invert(A).b
(%o114)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 
(%i115)

```

Erklärung:

rhs()	bestimmt die rechte Seite einer Gleichung
coefmatrix()	Koeffizientenmatrix eines lineare Gleichungssystems
invert()	Inverse einer Matrix
.	Matrizenmultiplikation

Tabelle 13. Matrizenmethode

Es ist eine schöne Übung, den Rohstoffbedarf für A, B und C zu ermitteln!

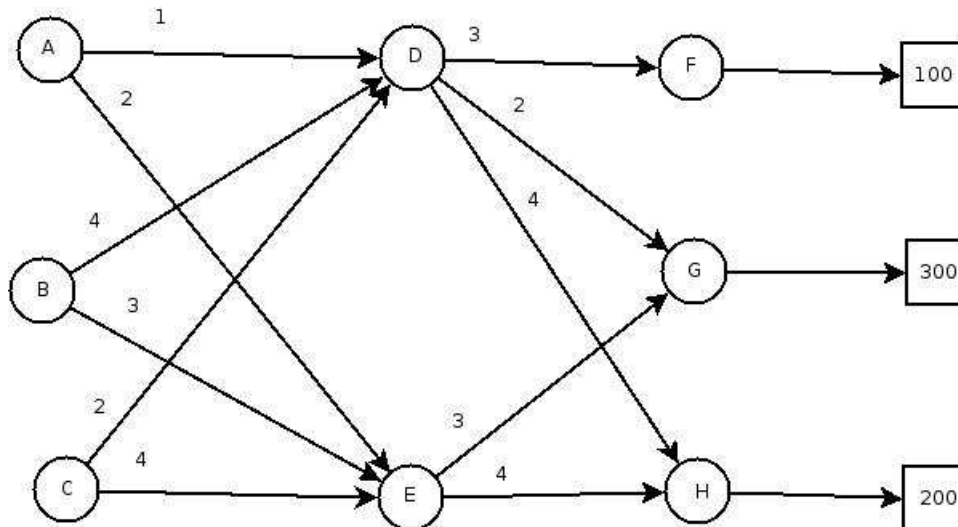


Abbildung 5. Vorlage zur Stücklistenauflösung

Die Berechnung des Rohstoffbedarfs funktioniert wie folgt:

```

(%i3) kill(all)
(%o0) done

```

```

(%i1) g1:a=d+2*e
(%o1) a=2e+d
(%i2) g2:b=4*d+3*e
(%o2) b=3e+4d
(%i3) g3:c=2*d+4*e
(%o3) c=4e+2d
(%i4) g4:d=3*f+2*g+4*h
(%o4) d=4h+2g+3f
(%i5) g5:e=3*g+4*h
(%o5) e=4h+3g
(%i6) g6:f=100
(%o6) f=100
(%i7) g7:g=300
(%o7) g=300
(%i8) g8:h=200
(%o8) h=200
(%i9) l:solve([g1,g2,g3,g4,g5,g6,g7,g8],[a,b,c,d,e,f,g,h])
(%o9) [[a=5100,b=11900,c=10200,d=1700,e=1700,f=100,g=300,h=200]]
(%i10)

```

Interaktive Maximaberechnungen

Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ermitteln

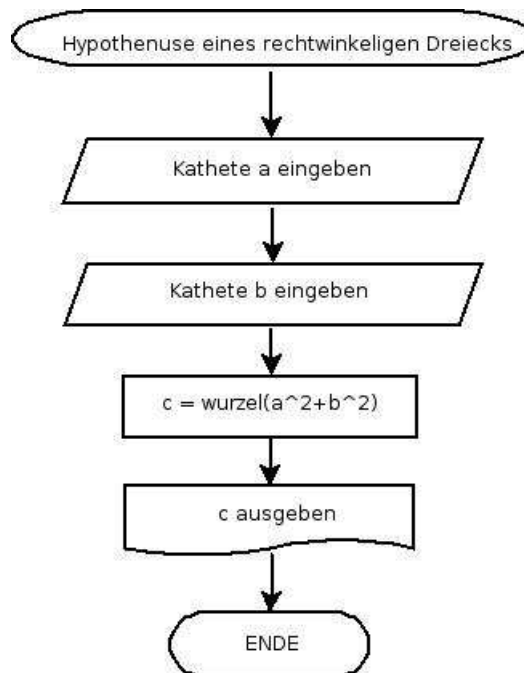


Abbildung 6. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ermitteln

```
(%i120) a:read("Gib die Seite a ein")
```

Gib die Seite a ein

3

```
(%o124) 3
```

```
(%i125) b:read("Gib die Seite b ein")
```

Gib die Seite b ein

4

```
(%o125) 4
```

```
(%i126) c:sqrt(a**2+b**2)
```

```
(%o126) 5
```

```
(%i127) print("Die Seite c =",c)
```

Die Seite c =c

```
(%o1) c
```

```
(%i2)
```

Erklärung:

read()	interaktive Eingabe von Daten bzw. Objekten
print()	Ausgabeanweisung

Tabelle 14. Programmierung

Anmerkung 8. Man kann bereits frühzeitig durch die Erstellung von solchen interaktiven Maximaberechnungen auch eine *wertvolle Querverbindung zum Gegenstand „Wirtschaftsinformatik“* herstellen.

Ein Beispiel mit wxMaxima:

```
(%i1) d:read("Gib die Diagonale eines Quadrats ein");
Gib die Diagonale eines Quadrats ein 10;
(%o1) 10
/*
VERARBEITUNG
(%i2) a:d/sqrt(2);
(%o2)  $\frac{10}{\sqrt{2}}$ 
(%i3) numer:true;
(%o3) true
(%i4) F:a**2;
(%o4) 50.0
(%i5) F:floor(F*100+0.5)/100.0;
(%o5) 50.0
```

Abbildung 7. Flächenberechnung mit wxMaxima

Erklärung:

<code>floor()</code>	das ist die nächstkleinere ganze Zahl, hier zur kaufmännischen Rundung
----------------------	--

Tabelle 15. Rundung

Funktionen

Schreibweise

(%i128) `f(x):=a*x**2+b*x+c`

(%o128) $f(x) := ax^2 + bx + c$

(%i129) `g(x):=x**2-8*x+15`

(%o129) $g(x) := x^2 - 8x + 15$

(%i130) `h(x):=3**x`

(%o130) $h(x) := 3^x$

(%i131) `i(x):=x**4`

(%o131) $i(x) := x^4$

(%i132) `r(x):=floor(x*100+0.5)/100.0`

(%o132) $r(x) := \frac{\lfloor x \cdot 100 + 0.5 \rfloor}{100.0}$

(%i133) `s(x):=sin(x)`

(%o133) $s(x) := \sin(x)$

(%i134)

Wertetabellen

(%i134) `x:makelist(i,i,-5,5)`

(%o134) $[-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]$

(%i135) `y:3*x+1`

(%o135) $[-14, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16]$

(%i136) `f(x)`

(%o136) $[60, 37, 20, 9, 4, 5, 12, 25, 44, 69, 100]$

(%i137) `g(x)`

(%o137) $[80, 63, 48, 35, 24, 15, 8, 3, 0, -1, 0]$

(%i138) `s(x)`

(%o138) $[-\sin(5), \sin(4), 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5]$

(%i139) `map(s,x)`

(%o139) $[-\sin(5), -\sin(4), -\sin(3), -\sin(2), -\sin(1), 0, \sin(1), \sin(2), \sin(3), \sin(4), \sin(5)]$

```
(%i140) x:makelist(1/i,i,1,6)
(%o140) [1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6]
(%i141) map(r,x)
(%o141) [1.0, 0.5, 0.33, 0.25, 0.2, 0.17]
(%i142)
```

Anmerkung 9. Die Funktion `map(a,b)` ist hier sehr nützlich

Koeffizienten einer Geradengleichung (lineare Funktion!)

Bei einer Geraden $y = kx + d$ sind Steigung und Abschnitt auf der y-Achse zu bestimmen. Wir zeigen hier eine Lösung mit wxMaxima:

```
/*
EINGABE
(%i1) gerade:read("Gib eine Gerade ein");
Gib eine Gerade ein y=3*x+4;
(%o1) y = 3 x + 4
```

Abbildung 8. Eingabe einer Geradengleichung in Standardform

```
/*
VERARBEITUNG
(%i2) l:solve(gerade,y);
(%o2) [ y = 3 x + 4 ]
(%i3) f:"rhs(l[1]);
(%o3) 3 x + 4
(%i4) f.expand(f);
(%o4) 3 x + 4
(%i5) koeff:bothcoeff(f,x);
(%o5) [ 3 , 4 ]
(%i6) k:koeff[1];
(%o6) 3
(%i7) d:koeff[2];
(%o7) 4
```

Abbildung 9. Die Bestimmung der Koeffizienten k und d (Steigung und Abschnitt auf der y-Achse)

```

/*
AUSGABE
(%i8) print("Die Steigung der Geraden ist",k)$
Die Steigung der Geraden ist 3
(%i9) print("Der Abschnitt auf der y-Achse ist",d)$
Der Abschnitt auf der y-Achse ist 4
(%i10)

```

Abbildung 10. Das Ergebnis

Matrizenrechnung

Durch das GUI wxMaxima ist das Computeralgebrasystem Maxima sehr gut für die Matrizenrechnung zu verwenden.

Verwendung von wxMaxima zur Eingabe

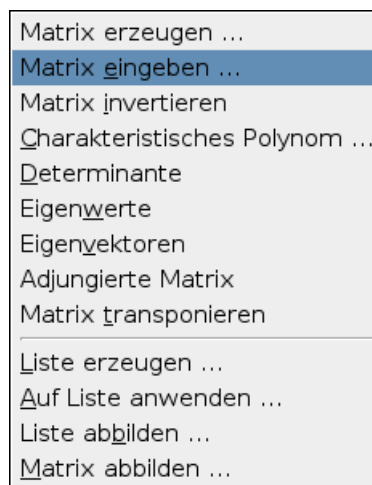


Abbildung 11. Menüauswahlpunkt „Algebra“ Matrixeingabe

Übersicht

```
(%i1) A:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9])
```

```
(%o1) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i2) B:matrix([7,8,9],[6,7,8],[1,3,2])
```

```
(%o2) 
$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

```

(%i3) C:A+B

$$(\%o3) \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 10 & 12 & 14 \\ 8 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

(%i4) D:A-B

$$(\%o4) \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -2 & -2 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(%i5) E:B-A

$$(\%o5) \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

(%i6) F:A.B

$$(\%o6) \begin{pmatrix} 22 & 31 & 31 \\ 64 & 85 & 88 \\ 106 & 139 & 145 \end{pmatrix}$$

(%i7) G:B.A

$$(\%o7) \begin{pmatrix} 102 & 126 & 150 \\ 90 & 111 & 132 \\ 27 & 33 & 39 \end{pmatrix}$$

(%i8) H:invert(B)

$$(\%o10) \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{11}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(%i11) I:B.H

$$(\%o12) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i13) J:transpose(B)

$$(\%o13) \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 8 & 7 & 3 \\ 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

(%i14)

Erklärung:

.	Matrizenmultiplikation
invert()	inverse Matrix
transpose()	transponierte Matrix

Tabelle 16. Matrizenrechnung

Anmerkung 10. Wegen der leichten Handhabbarkeit der Matrizenrechnung mit wxMaxima kann dieses Thema *einen erhöhten Stellenwert im Mathematikunterricht der Handelsakademie* bekommen. Ohne Computereinsatz wäre das Kalkül der Matrizenrechnung ohnehin überflüssig.

Determinanten

```
(%i14) DA:determinant(A)
(%o14) 0
(%i15) DB:determinant(B)
(%o15) -3
(%i16) DC:determinant(invert(B))
(%o16)  $-\frac{1}{3}$ 
(%i17) DD:determinant(transpose(B))
(%o17) -3
(%i18)
```

Finanzmathematik

Einfache Zinsen

Tagesformel

```
(%i18) kill(all)
(%o0) done
(%i1) K:1000
(%o1) 1000
(%i2) p:3
(%o2) 3
(%i3) t:180
(%o3) 180
(%i4) Z:K*p*t/36000.0
(%o4) 15.0
(%i5)
```

Monatsformel

```
(%i5) kill(all)
(%o0) done
(%i1) K:1000
```

```

(%o1) 1000
(%i2) p:3
(%o2) 3
(%i3) m:6
(%o3) 6
(%i4) Z:K*p*m/1200.0
(%o4) 15.0
(%i5)

```

Zinseszinsrechnung

Bezeichnungen

$$K_n = K_0 r^n$$

K_n = Endkapital

K_0 = Anfangskapital

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + i = \text{Aufzinsungsfaktor}$$

p = Zinssatz dekursiv *p.a.*

n = Laufzeit in Jahren

Endkapital berechnen

```

(%i10) kill(all)
(%o0) done
(%i1) K[0]:1000
(%o1) 1000
(%i2) p:3
(%o2) 3
(%i3) n:10
(%o3) 10
(%i4) i:p/100.0
(%o4) 0.03
(%i5) r:1+i
(%o5) 1.03
(%i6) K[n]:K[0]*r**n
(%o6) 1343.916379344122
(%i7) floor(%*100+0.5)/100.0
(%o7) 1343.92
(%i8)

```

Anfangskapital berechnen

```
(%i8) kill(all)
(%o0) done
(%i1) formel:K[n]=K[0]*r**n
(%o1)  $K_n = K_0 r^n$ 
(%i2) l:solve(formel,K[0])
(%o2)  $\left[ K_0 = \frac{K_n}{r^n} \right]$ 
(%i3) n:10
(%o3) 10
(%i4) p:3
(%o4) 3
(%i5) i:p/100.0
(%o5) 0.03
(%i6) r:1+i
(%o6) 1.03
(%i7) K[n]:1343.92
(%o7) 1343.92
(%i8) K[0]:K[n]/r**n
(%o10) 1000.002694108007
(%i11) floor(%*100+0.5)/100.0
(%o11) 1000.0
(%i12)
```

Zinssatz berechnen

```
(%i12) kill(all)
(%o0) done
(%i1) formel:K[n]=K[0]*r**n
(%o1)  $K_n = K_0 r^n$ 
(%i2) l:solve(formel,r)
```

Is nan integer?yes

```
(%o2)  $\left[ r = \left( \frac{K_n}{K_0} \right)^{\frac{1}{n}} \right]$ 
```

```
(%i3) r:ev(r,1)
```

```
(%o3)  $\left( \frac{K_n}{K_0} \right)^{\frac{1}{n}}$ 
```

```
(%i4) g:r=1+p/100
```

```
(%o4)  $\left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{p}{100} + 1$ 
```

```
(%i5) l:solve(g,p)
```

```
(%o5)  $\left[ p = 100 \left( \frac{K_n}{K_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 100 \right]$ 
```

```
(%i6) p:ev(p,l)
```

```
(%o6)  $100 \left( \frac{K_n}{K_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 100$ 
```

```
(%i7)
```

Laufzeit berechnen

```
(%i7) kill(all)
```

```
(%o0) done
```

```
(%i1) formel:K[n]=K[0]*r**n
```

```
(%o1)  $K_n = K_0 r^n$ 
```

```
(%i2) l:solve(formel,n)
```

```
(%o2)  $\left[ r^n = \frac{K_n}{K_0} \right]$ 
```

```
(%i4) n=(log(K[n])-log(K[0]))/log(r)
```

```
(%o4)  $n = \frac{\log(K_n) - \log(K_0)}{\log(r)}$ 
```

```
(%i5)
```

Anmerkung 11. solve() hat Schwierigkeiten mit Exponentialgleichungen

Rentenrechnung

Endwert einer nachschüssigen Rente

```
(%i5) kill(all)
```

```
(%o0) done
```

```
(%i1) R:1000
```

```
(%o1) 1000
```

```
(%i2) p:3
```

```
(%o2) 3
```

```
(%i3) i:p/100.0
```

```
(%o3) 0.03
```

```

(%i4) r:1+i
(%o4) 1.03
(%i5) n:10
(%o5) 10
(%i6) E:R*(r**n-1)/i
(%o6) 11463.87931147073
(%i7) floor(%*100+0.5)/100.0
(%o7) 11463.88
(%i8)

```

Barwert einer nachschüssigen Rente

```

(%i8) v:1/r
(%o8) 0.97087378640777
(%i9) B:R*(1-v**n)/i
(%o9) 8530.202836775832
(%i10) floor(%*100+0.5)/100.0
(%o10) 8530.200000000001
(%i11)

```

Endwert einer vorschüssigen Rente

```

(%i11) d:i/r
(%o11) 0.029126213592233
(%i12) E:R*(r**n-1)/d
(%o12) 11807.79569081485
(%i13) floor(%*100+0.5)/100.0
(%o13) 11807.8
(%i14)

```

Barwert einer vorschüssigen Rente

```

(%i14) B:R*(1-v**n)/d
(%o14) 8786.108921879108
(%i15) floor(%*100+0.5)/100.0
(%o15) 8786.110000000001
(%i16)

```

Anmerkung 12. Die Beispiele zur Finanzmathematik zeigen, dass man mit Maxima sehr gut verständliche Rechenprotokolle bekommt.

Abbildungsverzeichnis

Das Programm auf der Knoppix 5.2 DVD	4
Der Beginn des Pascalschen Dreiecks	11
Allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung mit wxMaxima	16
grafische Lösung mit Geogebra	18
Vorlage zur Stücklistenauflösung	20
Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ermitteln	21
Flächenberechnung mit wxMaxima	22
Eingabe einer Geradengleichung in Standardform	24
Die Bestimmung der Koeffizienten k und d (Steigung und Abschnitt auf der y -Achse)	24
Das Ergebnis	25
Menüauswahlpunkt „Algebra“ Matriceingabe	25

Tabellenverzeichnis

Grundrechenarten	4
Gespeicherte Werte und Objekte	5
Zahlendarstellung	5
Besondere Zahlen	7
Bedeutung von expand	10
Pascalsches Dreieck	10
Faktorzerlegung	12
Polynomdivision	12
Mengenlehre	13
Aussagenlogik	14
Mengenlehre	15
Nullstellen (Lösungen) von Polynomgleichungen	15
Matrizenmethode	20
Programmierung	22
Rundung	23
Matrizenrechnung	26