

RDP Mathematik und angewandte Mathematik

```
(%i1) kill(all);
```

```
(%o0) done
```

1. Aufgabe (Kosten- und Preistheorie)

Für einen Monopolbetrieb wurde die lineare Kostenfunktion $K = 28x + 900$ und die lineare Nachfragefunktion $p = 480 - 0,5x$.

Zu berechnen sind

- der Cournot'sche Punkt,
- der maximale Gewinn,
- die erlösmaximierende Menge und der zugehörige Preis,
- der maximale Erlös,
- die Gewinn Grenzen,
- die Sättigungsmenge und
- die Preisobergrenze.

Wie lauten die Antworten auf diese Fragen, wenn $K = -0,005x^2 + 84x + 115200$ und $p = 520 - 0,13x$?

GEGEBEN IST

```
(%i1) K:K(x):=28*x+900;
```

```
(%o1) K(x) := 28 x + 900
```

```
(%i2) p:p(x):=480-0.5*x;
```

```
(%o2) p(x) := 480 - 0.5 x
```

a) Man berechne den Cournot'schen Punkt.

Der Cournot'sche Punkt hat zwei Koordinaten:

- die Cournot'sche Menge (die gewinnmaximale Menge) und
- den Cournot'schen Preis (man muss die Cournot'sche Menge in die Nachfragefunktion einsetzen).

```
(%i3) U(x):=p(x)*x,expand;
```

```
(%o3) U(x) := p(x) x
```

```
(%i4) G(x):=U(x)-K(x);
```

```
(%o4) G(x) := U(x) - K(x)
```

(%i5) ab:diff(G(x),x);

(%o5) $452 - 1.0 x$

(%i6) l:realroots(ab);

(%o6) [$x = 452$]

(%i7) XC:x,l;

(%o7) 452

(%i8) PC:p(XC);

(%o8) 254.0

(%i9) Cournot_Punkt:[XC,PC];

(%o9) [452 , 254.0]

b) Man berechne den maximalen Gewinn.
Dazu müssen wir nur mehr die Cournot 'sche Menge in die Gewinnfunktion einsetzen.

(%i10) G_max:G(XC);

(%o10) 101252.0

c) Man bestimme die erlösmaximierende Menge und den zugehörigen Preis.
- eine Extremwertaufgabe.

(%i11) U(x);

(%o11) $(480 - 0.5 x) x$

(%i12) ab:diff(U(x),x);

(%o12) $480 - 1.0 x$

(%i13) l:realroots(ab);

(%o13) [$x = 480$]

(%i14) XU:x,l;

(%o14) 480

(%i15) PU:p(XU);

(%o15) 240.0

d) Man bestimme den maximalen Erlös.

- die umsatzmaximale Menge in die Umsatzfunktion einsetzen
- Umsatz = Erlös

(%i16) U_max:U(XU);

(%o16) 115200.0

(%i17) U_max:PU*XU;

(%o17) 115200.0

e) Man bestimme die Gewinn Grenzen.

- Grundgleichung: Gewinn = 0
- oder Erlös = Kosten
- untere Gewinn Grenze = Gewinnschwelle =
Nutzenschwelle = Break Even
- obere Gewinn Grenze = Gewinn Grenze =
Nutzen Grenze

(%i18) g1: G(x)=0,expand;

(%o18) $-0.5x^2 + 452x - 900 = 0$

(%i19) l:realroots(g1),numer;

(%o19) [$x = 1.995555549860001$, $x = 902.00444445014$]

(%i20) NS:x,l[1];NS:floor(NS*100+0.5)/100.0;

(%o20) 1.995555549860001

(%o21) 2.0

(%i22) NG:x,l[2];NG:floor(NG*100+0.5)/100.0;

(%o22) 902.00444445014

(%o23) 902.0

f) Man bestimme die Sättigungsmenge!

- das ist die Nachfrage, wenn der Preis 0 ist

(%i24) p(x);

(%o24) $480 - 0.5x$

```
(%i25) l:realroots(p(x));
```

```
(%o25) [ x = 960 ]
```

```
(%i26) SM:x,l;
```

```
(%o26) 960
```

g) Man bestimme die Preisobergrenze!
- der Preis ist so hoch, dass die Nachfrage 0 wird.

```
(%i27) p(x);
```

```
(%o27) 480 - 0.5 x
```

```
(%i28) PO:p(0);
```

```
(%o28) 480
```

```
(%i29) kill(all);
```

```
(%o0) done
```

Kompakte Berechnung mit den veränderten Daten: $K=-0,005x^2+84x+115200$ und $p=520-0,13x$

```
(%i1) K:K(x):=-0.005*x**2+84*x+115200;
```

```
(%o1) K(x) := (- 0.005) x2 + 84 x + 115200
```

```
(%i2) p:p(x):=520-0.13*x;
```

```
(%o2) p(x) := 520 - 0.13 x
```

```
(%i3) U(x):=p(x)*x;G(x):=U(x)-K(x);ab:diff(G(x),x);l:realroots(ab);
```

```
(%o3) U(x) := p(x) x
```

```
(%o4) G(x) := U(x) - K(x)
```

```
(%o5) 436 - 0.25 x
```

```
(%o6) [ x = 1744 ]
```

```
(%i7) XC:x,l;PC:p(XC);Cournot_Punkt:[XC,PC];
```

```
(%o7) 1744
```

```
(%o8) 293.28
```

```
(%o9) [ 1744 , 293.28 ]
```

(%i10) $G_max:G(XC);G_max:floor(G_max*100+0.5)/100.0;$

(%o10) 264991.99999999999

(%o11) 264992.0

(%i12) $ab:diff(U(x),x);l:realroots(ab);$

(%o12) 520 - 0.26 x

(%o13) [$x = 2000$]

(%i14) $XU:x,l;PU:p(XU);U_max:PU*XU;U_max:U(XU);$

(%o14) 2000

(%o15) 260.0

(%o16) 520000.0

(%o17) 520000.0

(%i18) $l:realroots(G(x)=0);$

(%o18) [$x = 288$, $x = 3200$]

(%i19) $GS:x,l[1];GG:x,l[2];Gewinnzone:[GS,GG];$

(%o19) 288

(%o20) 3200

(%o21) [288 , 3200]

(%i22) $l:realroots(p(x)=0);$

(%o22) [$x = 4000$]

(%i23) $XS:x,l;$

(%o23) 4000

(%i24) $PO:p(0);$

(%o24) 520

(%i25) $kill(all);$

(%o0) *done*

2. Aufgabe (Ein Optimierungsproblem)

Anmerkung: die Aufgabenstellung wird häufig als unrealistisch kritisiert. Eine realistische äquivalente Aufgabenstellung wäre z.B. die Herleitung des Brechungsgesetzes von Snellius aus dem Fermat'schen Prinzip.

Ein Haus liegt 100 m abseits einer geradlinigen Straße, die von einem Fernheizwerk A wegführt. Es soll an das städtische Fernheizsystem angeschlossen werden. Der Laufmeter für die Verlegung kostet längs der Straße € 100,-- je Laufmeter, im Gelände jedoch € 140,--.

An welcher Stelle C muss die Abzweigung erfolgen, damit die Kosten minimal werden? Der hausnächste Punkt B auf der Straße ist 1500 m von A entfernt. Die Strecke BC soll als Variable x dienen.

Folgende Fragen sind jedenfalls zu lösen:

- Wie heißt die Kostenfunktion?
- Für welchen x-Wert hat die Kostenfunktion ein Minimum?
- Wie groß sind die minimalen Kosten?

Kosten

(%i1) ks:100;kg:140;

(%o1) 100

(%o2) 140

Abmessungen

(%i3) HB:100;AB:1500;BC:x;AC:AB-x;

(%o3) 100

(%o4) 1500

(%o5) x

(%o6) 1500 - x

Nebenbedingung

(%i7) g:HC**2=HB**2+BC**2 /*es gilt der pythagoräische Lehrsatz */;

(%o7) $HC^2 = x^2 + 10000$

(%i8) l:solve(g,HC);

(%o8) $[HC = -\sqrt{x^2 + 10000}, HC = \sqrt{x^2 + 10000}]$

(%i9) HC:ev(HC,l[2]);

(%o9) $\sqrt{x^2 + 10000}$

Kostenfunktion (Lösung von A)

(%i10) K:AC*ks+HC*kg;

(%o10) $140\sqrt{x^2 + 10000} + 100(1500 - x)$

Ableitung bestimmen und NULL setzen

(%i11) ab:diff(K,x);

(%o11) $\frac{140x}{\sqrt{x^2 + 10000}} - 100$

(%i12) g:ab=0;

(%o12) $\frac{140x}{\sqrt{x^2 + 10000}} - 100 = 0$

Diese Gleichung läßt sich nicht mit Maxima (solve ...) unmittelbar lösen
Man muss "händisch" eingreifen

(%i13) g:g+100;

(%o13) $\frac{140x}{\sqrt{x^2 + 10000}} = 100$

(%i14) g:g*denom(lhs(g));

(%o14) $140x = 100\sqrt{x^2 + 10000}$

(%i15) g:g**2 /* Achtung, das ist keine Äquivalenzumformung */;

(%o15) $19600x^2 = 10000(x^2 + 10000)$

(%i16) l:realroots(g),numer;

(%o16) [$x = -102.0620726048946$, $x = 102.0620726048946$]

Optimale Abzweigung (Lösung von (b))

```
(%i17) X:x,l[2];X:floor(X*100+0.5)/100.0;
```

```
(%o17) 102.0620726048946
```

```
(%o18) 102.06
```

```
(%i19) K_min:K,x=X;K_min:floor(K_min*100+0.5)/100.0;
```

```
(%o19) 159797.9589721635
```

```
(%o20) 159797.96
```

```
(%i21) kill(all);
```

```
(%o0) done
```

3. Aufgabe (Finanzmathematik)

- a) Jemand nimmt ein Darlehen von 100.000,-- und zahlt jährlich 10.000,-- bei 8% Zinsen dekursiv p.a. zurück. Wann ist er mit den Rückzahlungen fertig?
- b) Für einen Kauf gibt es zwei Angebote:
 A 100.000,-- sofort, 500.000,-- in 2 Jahren und 400.000,-- in 10 Jahren,
 B 300.000,-- sofort und 700.000,-- nach 10 Jahren.
 Welches Angebot ist bei einem Kalkulationszinsfuß von $i=8\%$ günstiger?
- c) Jemand zahlt 20 Jahre lang am Ende jeden Monats 1.000,-- ein. Welche nachschüssige Monatsrente kann er danach 10 Jahre lang beziehen, bei einem Kalkulationszinsfuß von $i=8\%$?
- a) Jemand nimmt ein Darlehen von 100.000,-- und zahlt jährlich 10.000,-- bei 8% Zinsen dekursiv p.a. zurück. Wann ist er mit den Rückzahlungen fertig?

(%i1) D:100000;A:10000;p:8;

(%o1) 100000

(%o2) 10000

(%o3) 8

(%i4) i:p/100;r:1+i,numer;

(%o4) $\frac{2}{25}$

(%o5) 1.08

(%i6) g:D*r**n=A*(r**n-1)/i,expand;

(%o6) $100000 \cdot 1.08^n = 125000 \cdot 1.08^n - 125000$

Lösung von Exponentialgleichung funktioniert mit solve() schlecht

(%i7) g:g-lhs(g);

(%o7) $0 = 25000 \cdot 1.08^n - 125000$

(%i8) g:g+125000;

(%o8) $125000 = 25000 \cdot 1.08^n$

(%i9) g:g/25000;

(%o9) $5 = 1.08^n$

(%i10) g:log(lhs(g))=log(rhs(g));

(%o10) $\log(5) = 0.076961041136128 n$

(%i11) l:solve(g,n),numer;

`rat' replaced 1.6094379124341 by 9993/6209 = 1.60943791270736

`rat' replaced -0.07696104113613 by -2495/32419 = -0.07696104136463

`rat' replaced 1.60943791270736 by 8390/5213 = 1.609437943602532

`rat' replaced -0.07696104136463 by -2495/32419 = -0.07696104136463

`rat' replaced -2.958575557584836E-8 by -1/33800049 = -2.958575592597514E-8

`rat' replaced -20.912372221904 by -96176/4599 = -20.912372254838

(%o11) [$n = 20.91237225483801$]

(%i12) n:ev(n,l);n:floor(n*100+0.5)/100.0;

(%o12) 20.91237225483801

(%o13) 20.91

b) Für einen Kauf gibt es zwei Angebote:

A 100.000,-- sofort, 500.000,-- in 2 Jahren und 400.000,-- in 10 Jahren,

B 300.000,-- sofort und 700.000,-- nach 10 Jahren.

Welches Angebot ist bei einem Kalkulationszinsfuß von $i=8\%$ günstiger?

(%i14) p:8;i:p/100.0;r:1+i;

(%o14) 8

(%o15) 0.08

(%o16) 1.08

(%i17) A:100000+500000/r**2+400000/r**10;A:floor(A*100+0.5)/100.0;

(%o17) 713946.8053847654

(%o18) 713946.8100000001

(%i19) B:300000+700000/r**10;B:floor(B*100+0.5)/100.0;

(%o19) 624235.4416592789

(%o20) 624235.4399999999

(%i21) if A>B then "A ist guentiger"
else if A else "Beide gleich";
(%o21) A ist guentiger

c) Jemand zahlt 20 Jahre lang am Ende jeden Monats 1.000,-- ein. Welche nachschüssige Monatsrente kann er danach 10 Jahre lang beziehen, bei einem Kalkulationszinsfuß von $i=8\%$?

(%i22) R:1000;p:8;n:20;

(%o22) 1000

(%o23) 8

(%o24) 20

(%i25) i:p/100.0;

(%o25) 0.08

(%i26) r:1+i;

(%o26) 1.08

(%i27) rm:r**(1/12);

(%o27) 1.006434030110003

(%i28) im:rm-1;

(%o28) 0.0064340301100034

(%i29) E:R*(rm**(12*n)-1)/im,numer;E:floor(E*100+0.5)/100.0;

(%o29) 568999.0692081694

(%o30) 568999.07

(%i31) B:E;n:10;vm:1/rm;kill(R);

(%o31) 568999.07

(%o32) 10

(%o33) 0.99360710198829

(%o34) *done*

(%i35) g:B=R*(1-vm**(12*n))/im;

(%o35) 568999.07 = 83.43239038945534 R

(%i36) **l:solve(g,R),numer;**

`rat' replaced 568999.07 by $7965987/14 = 568999.0714285715$

`rat' replaced -83.4323903894553 by $-53063/636 = -83.4323899371069$

`rat' replaced 568999.0714285715 by $7396988/13 = 568999.0769230769$

`rat' replaced -83.4323899371069 by $-53063/636 = -83.4323899371069$

`rat' replaced $-1.209482341557813E-4$ by $-1/8268 = -1.209482341557813E-4$

`rat' replaced -6819.88227056663 by $-115938/17 = -6819.88235294118$

(%o36) [**R = 6819.882352941177**]

(%i37) **kill(all);**

(%o0) **done**

4. Aufgabe (Wahrscheinlichkeitsrechnung)

- a) Belgien hat ungefähr 9,5 Millionen Einwohner, von denen ungefähr ein Drittel Wallonen sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 12 zufällig ausgewählten Belgiern
- genau 3,
 - höchstens 3 Wallonen sind?
- b) Ein Kaufgeschäft verkauft durchschnittlich 133 Semmeln pro Tag. Die Streuung beträgt 22. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer Verknappung, wenn beim Bäcker täglich 160 Semmeln gekauft werden?
- a) Belgien hat ungefähr 9,5 Millionen Einwohner, von denen ungefähr ein Drittel Wallonen sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 12 zufällig ausgewählten Belgiern
- genau 3,
 - höchstens 3 Wallonen sind?

(%i1) n:12;p:1/3;

(%o1) 12

(%o2) $\frac{1}{3}$

(%i3) W(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k);

(%o3) $W(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

(%i4) WA:W(3),numer;WA:floor(WA*1000+0.5)/1000.0;

(%o4) 0.21195203230462

(%o5) 0.212

(%i6) WB:sum(W(k),k,0,3),numer;WB:floor(WB*1000+0.5)/1000.0;

(%o6) 0.39307467809221

(%o7) 0.393

- b) Ein Kaufgeschäft verkauft durchschnittlich 133 Semmeln pro Tag. Die Streuung beträgt 22. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer Verknappung, wenn beim Bäcker täglich 160 Semmeln gekauft werden?

(%i8) kill(all);

(%o0) *done*

(%i1) m:133;s:22;x:160;

(%o1) 133

(%o2) 22

(%o3) 160

(%i4) load(distrib);

(%o4)

C:/Programme/Maxima-5.17.1/share/maxima/5.17.1/share/contrib/distrib/distrib.mac

(%i5) W:1-cdf_normal(x,m,s),numer;W:floor(W*1000+0.5)/1000.0;

(%o5) 0.10986005128512

(%o6) 0.11

Created with [wxMaxima](#).