Herleitung der Poissonverteilung

von

Johann Weilharter, BHAK/BHAS 5580 Tamsweg

Erwartungswert der Binomialverteilung

Der Erwartungswert der Binomialverteilung ist

$E(x) = n\,p$ oder

$\mu = n\,p$

Daher ist $p = \frac{\mu}{n}$

Wenn p klein sein soll, so muss $n \to \infty$ streben.

Herleitung der Poissionverteilung als Grenzwert

(%i1) `p:m/n`

(%o1) $\frac{m}{n}$

(%i2) `BV(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k)`

(%o3) $\mathrm{BV}(k) := \binom{n}{k}\, p^k\, (1-p)^{n-k}$

(%i4) `PV:limit(BV(k),n,inf)`

Is k positive, negative, or zero?`positive`
Is $n-m$ positive or negative?`positive`
Is m positive, negative, or zero?`positive`
Is $k!$ positive, negative, or zero?`positive`
Is $k$an integer?`yes`
Is $n-k$ positive or negative?`positive`
Is $k-1$ positive, negative, or zero?`positive`

(%o5) $\frac{m^k\,\mathrm{e}^{-m}}{k!}$

(%i6)

Formel der Poissonverteilung

$W(k) = \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu}$

Aufgaben

Beispiel 1

Erstelle einen Vergleich der Binomialverteilung mit n = 30 und p = 0,3 mit der zugehörigen Näherung durch Poissonverteilung (nur die ersten 6 Werte)

(%i1) `n:30;`

(%o1) 30

(%i2) `p:0.006`

(%o37) 0.006

(%i38) `B(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k);`

(%o38) $B(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

(%i39) `bv:makelist(floor(B(k)*1000+0.5)/1000.0,k,0,5);`

(%o39) $[0.835, 0.151, 0.013, 0.001, 0.0, 0.0]$

(%i40) `P(k):=m**k/k!*exp(-m);`

(%o40) $P(k) := \frac{m^k}{k!} \exp(-m)$

(%i41) `m:n*p;`

(%o41) 0.18

(%i42) `pv:makelist(floor(P(k)*1000+0.5)/1000.0,k,0,5);`

(%o42) $[0.835, 0.15, 0.014, 0.001, 0.0, 0.0]$

(%i43) `vergleich:[transpose(bv),transpose(pv)];`

(%o43) $$\left[\begin{pmatrix} 0.835 \\ 0.151 \\ 0.013 \\ 0.001 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.835 \\ 0.15 \\ 0.014 \\ 0.001 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}\right]$$

Aufgabe 2

Berechne den Erwartungswert einer Binomialverteiung mit n = 10 und p = 0,001 über die klassische Formel $E(X) = \sum p_i x_i$ und dann daraus die Poissonverteilung.

(%i1) `n:10`

(%o11) 10

(%i12) `p:0.01`

(%o12) 0.01

(%i13) `B(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k)`

(%o13) $B(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

(%i14) `x:makelist(k,k,0,n)`

(%o14) $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$

(%i15) `p:makelist(B(k),k,0,n)`

(%o15) $[0.9043820750088, 0.091351724748364, 0.0041523511249256, 1.1184784174883881 \times 10^{-4}, 1.977108\backslash$
$3137421 \times 10^{-6}, 2.3964949257479997 \times 10^{-8}, 2.0172516209999998 \times 10^{-10}, 1.1643588 \times 10^{-12}, 4.410450000\backslash$
$0000005 \times 10^{-15}, 9.9000000000000012 \times 10^{-18}, 1.0000000000000001 \times 10^{-20}]$

(%i16) `m:sum(p[i]*x[i],i,1,n+1)`

(%o16) 0.1

(%i17) `kill(x)`

(%o17) **done**

(%i18) `r(x):=floor(x*1000+0.5)/1000.0`

(%o18) $r(x) := \frac{\lfloor x\, 1000 + 0.5 \rfloor}{1000.0}$

(%i19) `P:map(r,p)`

(%o19) $[0.904, 0.091, 0.004, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]$

(%i20) `PV(k):=m**k/k!*exp(-m)`

(%o20) $\mathrm{PV}(k) := \frac{m^k}{k!} \exp(-m)$

(%i21) `pv:makelist(PV(k),k,0,n)`

(%o21) $[0.90483741803596, 0.090483741803596, 0.0045241870901798, 1.5080623633932649 \times 10^{-4}, 3.77015\backslash$
$59084831616 \times 10^{-6}, 7.5403118169663209 \times 10^{-8}, 1.256718636161053 \times 10^{-9}, 1.7953123373729329 \times 10^{-11},$
$2.2441404217161649 \times 10^{-13}, 2.4934893574624048 \times 10^{-15}, 2.4934893574624042 \times 10^{-17}]$

(%i22) `PV:map(r,pv)`

(%o22) $[0.905, 0.09, 0.005, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]$

(%i23)

Beispiel 3

Aus Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung sollen der Stichprobenumfang n und die apriori-Wahrscheinlichkeit p bestimmt werden.

(%i23) `n:30`

(%o23) 30

(%i24) `p:0.01`

(%o24) 0.01

(%i25) `m:n*p`

(%o25) 0.3

(%i26) `v:n*p*(1-p)`

(%o27) 0.297

(%i28) `kill(n,p)`

(%o28) **done**

(%i29) `g1:m=n*p`

(%o29) $0.3 = n\, p$

(%i30) `g2:v=n*p*(1-p)`

(%o30) $0.297 = n\,(1-p)\, p$

(%i31) `l:solve([g1,g2],[n,p])`

```
'rat' replaced 0.3 by 3//10 = 0.3

'rat' replaced 0.297 by 297//1000 = 0.297
```

(%o31) $\left[\left[n = 30, p = \frac{1}{100}\right]\right]$

(%i32)