/*

FORMELSAMMLUNG MATHEMATIK

FINANZMATHEMATIK

Zinseszinsrechnung
Rentenrechnung
Investitionsrechnung
Tilgungspläne

p = Zinssatz in Prozent
i = Zinssatz = p/100
n = Laufzeit in Jahren

ZINSESZINSRECHNUNG

Endkapital

Ko = Anfangskapital
Kn = Endkapital
n = Laufzeit in Jahren
r = Aufzinsungsfaktor

(%i1) K[n]=K[0]*r**n;

(%o1) $K_n = K_0\, r^n$

/*

Aufzinsungsfaktor

(%i8) r=1+p/100;

(%o8) $r = \frac{p}{100} + 1$

(%i9) r=1+i;

(%o9) $r = i + 1$

p ist im allgemeinen der dekursive Jahreszinssatz per annum in Prozent (%)

i = p/100 ist derselbe Zinssatz als Dezimalzahl

/*

Anfangskapital

(%i2) K[0]=K[n]/r**n;

(%o2) $K_0 = \frac{K_n}{r^n}$

/*

Zinssatz

(%i3) r=(K[n]/K[0])**(1/n);

(%o3) $r = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{1/n}$

n-te Wurzel

(%i4) p=100*(r-1);

(%o4) $p = 100\left(r - 1\right)$

/*

Laufzeit

(%i7) n=(log(K[n])-log(K[0]))/log(r);

(%o7) $$n=\frac{\log\left(K_n\right)-\log\left(K_0\right)}{\log\left(r\right)}$$

10 % Zinsen dekursiv bedeutet, dass bei einem Kapital von 1000 nach einem Jahr 1100,-- zurückgezahlt werden muss.

10% Zinsen antizipativ bedeutet, dass bei einem Kapital von 1000 nur 900,-- ausbezahlt werden und 1000,-- zurückbezahlt werden müssen. Dekursiv gesehen, sind das also mehr als 10%

/*

RENTENRECHNUNG

R = Rentenrate
r = Aufzinsungsfaktor
v = Abzinsungsfaktor
E = Endwert
B = Barwert

NACHSCHÜSSIG (die Zahlung erfolgt am Ende der Rentenperiode)

Endwert

(%i10) E=(r**n-1)*R/i;

(%o10) $$E=\frac{\left(r^n-1\right)R}{i}$$

/*

Barwert

(%i12) B=R*(1-v**n)/i;

(%o12) $$B=\frac{\left(1-v^n\right)R}{i}$$

/*

VORSCHÜSSIG (die Zahlung erfolgt am Beginn der Rentenperiode)

Endwert

(%i13) E = R*((r**n-i)/d);

(%o13) $E=\frac{\left(r^{n}-i\right)R}{d}$

/*

d ist der Diskontsatz,
d = i/(1+i)

/*

Barwert

(%i14) B=R*(1-v**n)/d;

(%o14) $B=\frac{\left(1-v^{n}\right)R}{d}$

/*

ÄQUIVALENZPRINZIP

Das ist das Grundprinzip von Geldgeschäften:

Leistung = Gegenleistung
(bezogen auf denselben Zeitpunkt)

ANWENDUNG
* Rentenumwandlung
* Investitionsrechnung
* Tilgungsplan

/*

KOSTEN- UND PREISTHEORIE

KOSTEN

/*

Lineare Kostenfunktion

Die lineare Kostenfunktion ist ein sehr einfaches Modell.
K = Gesamtkosten
k = proportionale Kosten
k*x = variable Kosten
F = Fixkosten

(%i15) K(x):=k*x+F;

(%o15) $K\left(x\right):=k\,x+F$

/*

Bei einer linearen Kostenfunktion gibt es kein -> Betriebsoptimum!

/*

Quadratische Kostenfunktion

(%i16) K(x):=a*x**2+b*x+c;

(%o16) $K(x) := a\ x^2 + b\ x + c$

/*

c sind die Fixkosten

/*

Kubische Kostenfunktion

(%i17) K(x):=a*x**3+b*x**2+c*x+d;

(%o17) $K(x) := a\ x^3 + b\ x^2 + c\ x + d$

/*

d sind die Fixkosten
Eine geeignete Kostenfunktion dritten Grades gibt eine
s-förmige Kostenkurve

/*

Betriebsoptimum

Das Betriebsoptimum ist jene Ausbringungsmenge, bei der die Durch-
schnittskosten am kleinsten werden. Die kleinsten Durchschnitts-
kosten heißen auch langfristige Preisuntergrenze. Die Durchschnitts
kosten nennt man auch Stückkosten. Die Berechnung des Betriebsoptim
ist eine Extremwertaufgabe

/*

Allgemein für Kostenfunktion

(%i1) K(x);

(%o1) $K(x)$

/*

Allgemein für Durchschnittskosten

(%i2) DK(x):=K(x)/x;

(%o2) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

/*

Wir müssen die erste Ableitung NULL setzen,
das ist die notwendige Bedingung für das
Auftreten eines Extremwerts!

(%i3) ab:diff(DK(x),x);

(%o3) $$\frac{\frac{d}{d\,x}K(x)}{x}-\frac{K(x)}{x^2}$$

(%i4) l:solve(ab=0);

(%o4) $$[x=\frac{K(x)}{\frac{d}{d\,x}K(x)}]$$

/*

Das ist die allgemeine Lösung für das Betriebs-
optimum

/*

Minimum der Durchschnittskosten = langfristige Preisuntergrenze
----

Wenn man das Betriebsoptimum in die Durchschnittskosten
einsetzt, erhält man das Minimum der Durchschnittskosten.
Dieses nennt man auch langfristige Preisuntergrenze.

/*

Grenzkosten

Die Grenzkosten geben an, wie sich die Kosten ändern,
wenn sich die Ausbringungsmenge im Durchschnitt um
EINS ändert.

Die Grenzkosten sind die Ableitung der Gesamtkosten.

(%i9) K(x);

(%o9) $K(x)$

(%i11) GK(x):='diff(K(x),x);

(%o11) $$GK(x):=\frac{d}{d\,x}K(x)$$

/*

Kostenkehre

Die Kostenkehre, ist der Wendepunkt der Kostenkurve. In der Kostenkehre haben die Grenzkosten ein Minimum.

/*

Kostenfunktion

(%i12) K(x);

(%o12) $K(x)$

/*

Man muss die zweite Ableitung der Kostenfunktion
NULL setzen

(%i13) ab2:'diff(K(x),x,2);

(%o13) $\frac{d^2}{d\,x^2} K(x)$

(%i14) l:solve(ab2=0,x);

(%o14) $[\frac{d^2}{d\,x^2} K(x) = 0]$

/*

NACHFRAGE

Die Nachfrage gibt an, wie sich die nachgefragte Menge ändert, wenn sich der Preis ändert.

/*

Normales Nachfragegesetz
----
wenn der Preis steigt, sinkt die Nachfrage und umgekehrt
wenn der Preis sinkt, steigt die Nachfrage

Eine bekannte Ausnahme ist der Snob-Effekt ("was nichts kostet, ist nichts wert")

/*

Lineare Nachfragefunktion

(%i15) p(x):=a*x+b;

(%o15) $p(x) := a\,x + b$

/*

```
-------------------------------
Quadratische Nachfragefunktion
-------------------------------
```

(%i16) p(x):=a*x**2+b*x+c;

(%o16) $p(x) := a\ x^2 + b\ x + c$

/*

```
------------
Berechnungen
------------
* lineare Funktion aus zwei Punkten
* lineare Funktion aus mehr als zwei Punkten
  -> lineare Regression
* quadratische Funktion aus drei Punkten
```

/*

UMSATZ

Der Umsatz (auch "Erlös") ist das Produkt aus
Menge x Preis

Das darf man nicht mit dem mengenmäßigen Umsatz,
den man auch Absatz (oder auch -> Nachfrage
nennt)

(%i1) U(x):=p(x)*x;

(%o1) $U(x) := p(x)\ x$

/*

```
------------------------------------
Umsatz bei linearer Nachfragefunktion
------------------------------------
```

(%i2) p(x):=a*x+b;

(%o2) $p(x) := a\ x + b$

(%i9) U(x):=p(x)*x;

(%o9) $U(x) := p(x)\ x$

(%i10) U(x);

(%o10) $x\ (a\ x + b)$

(%i11) expand(%);

(%o11) $a\ x^2 + b\ x$

/*

Ergebnis: wenn eine lineare Nachfragefunktion
gegeben ist, dann ist die Umsatzfunktion eine
quadratische Funktion

/*

Umsatz bei quadratischer Nachfragefunktion

(%i12) `p(x):=a*x**2+b*x+c;`

(%o12) $p(x) := a\,x^2 + b\,x + c$

(%i13) `U(x):=p(x)*x;`

(%o13) $U(x) := p(x)\,x$

(%i14) `U(x);`

(%o14) $x\left(a\,x^2 + b\,x + c\right)$

(%i15) `expand(%);`

(%o15) $a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$

/*

Bei einer quadratischen Nachfragefunktion ergibt sich
eine Kostenfunktion dritten Grades.

/*

Umsatzmaximale Menge

(%i11) `p(x);`

(%o11) $p(x)$

(%i12) `U(x):=p(x)*x;`

(%o12) $U(x) := p(x)\,x$

/*

Man muss die erste Ableitung bestimmen

(%i13) `ab:diff(U(x),x);`

(%o13) $x\left(\frac{d}{d\,x}\,p(x)\right) + p(x)$

/*

Wenn man diese Ableitung NULL setzt, erhält man die
umsatzmaximale Menge.

/*

```
----------------------
Umsatzmaximaler Preis
----------------------
```

Wenn man die umsatzmaximale Menge in die Nachfrage-
funktion einsetzt, erhält man den umsatzmaximalen Preis.

/*

```
----------------
Maximaler Umsatz
----------------
```

Wenn man die umsatzmaximale Menge in die Umsatz-
funktion einsetzt, dann erhält man den maximalen Umsatz.

/*

GEWINN

Gewinn = Erlös - Kosten
Gewinn = Umsatz - Kosten

/*

```
----------
Definition
----------
```

(%i16) G(x):=E(x)-K(x);

(%o16) $G(x) := E(x) - K(x)$

(%i17) G(x):=U(x)-K(x);

(%o17) $G(x) := U(x) - K(x)$

/*

```
------
Gewinn
------
```

(%i1) G(x) > 0;

(%o1) $G(x) > 0$

/*

```
-------------------------
Weder Gewinn noch Verlust
-------------------------
```

(%i2) G(x)= 0;

(%o2) $G(x) = 0$

/*

```
-------
Verlust
-------
```

(%i3) G(x) < 0;

(%o3) $G(x) < 0$

/*

```
-------------------------
Berechnung der Gewinnzone
-------------------------
```

(%i4) G(x) = 0;

(%o4) $G(x) = 0$

(%i5) E(x) = K(x);

(%o5) $E(x) = K(x)$

/*

Untergrenze der Gewinnzone:
* Break Even Point
* Nutzenschwelle
* Gewinnschwelle

Obergrenze der Gewinnzone:
* Nutzengrenze
* Gewinngrenze

/*

```
-----------------
Cournotsche Menge
-----------------
```

Die Counotsche Menge ist jene Menge, für die der Gewinn maximal wird. Das ist also die gewinnmaximale Menge.

Wenn man die Cournotsche Menge in die Nachfragefunktion einsetzt, erhält man den Cournotschen Preis. Der sogenannte Cournotsche Punkt hat zwei Koordinaten: die Cournotsche Menge xC und den Cournotschen Preis pC.

Wenn man den Cournotschen Preis in den Gewinn einsetzt, erhält man den maximalen Gewinn.

/*

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

/*

Wahrscheinlichkeitsverteilung

(%i6) n:6;

(%o6) 6

/*

Zufallsvariable

Hier wird von der gruppierten Liste ausgegangen.

Mit Hilfe des Unterprogramms "descriptive" kann man mit Maxima auch aus umfangreichen Urlisten leicht gruppierte Listen erzeugen.

(%i8) X:makelist(x[i],i,1,n);

(%o8) $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$

/*

Absolute Häufigkeiten

(%i9) H:makelist(h[i],i,1,n);

(%o9) $[h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6]$

(%i15) N:sum(h[i],i,1,'n);

(%o15) $\sum_{i=1}^{n} h_i$

/*

Relative Häufigkeiten = Wahrscheinlichkeiten

(%i16) P:H/N;

(%o16) $\left[\frac{h_1}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_2}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_3}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_4}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_5}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_6}{\sum_{i=1}^{n} h_i}\right]$

/*

Erwartungswert

(%i17) kill(all);

(%o0) *done*

(%i1) E(X)=sum(h[i]*x[i],i,1,n)/sum(h[i],i,1,n);

Der Erwartungswert ist das gewogene arithmetische Mittel.

(%o1) $$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i \, x_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i}$$

(%i2) `E(X)=sum(p[i]*x[i],i,1,n);`

(%o2) $$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, x_i}$$

das ist die Formel für den Erwartungswert, die üblicherweise von uns verwendet wird.

/*

Varianz

(%i3) `V(X) = E((X-μ)**2);`

(%o3) $$V(X) = E\left((X - \mu)^2\right)$$

die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert!

/*

Streuung

(%i4) `S(X) = sqrt(V(X));`

(%o4) $$S(X) = \sqrt{V(X)}$$

die Streuung ist die Wurzel aus der Varianz

/*

Beispiel: Schularbeitenstatistik

Anregung: rechne dieses Beispiel nach

(%i5) `X:[1,2,3,4,5];`

(%o5) [1 , 2 , 3 , 4 , 5]

(%i6) `H:[2,3,6,4,2];`

(%o6) [2 , 3 , 6 , 4 , 2]

(%i7) `n:length(H);`

(%o7) 5

(%i9) `N:sum(H[i],i,1,n);`

(%o9) 17

(%i10) `P:H/N;`

(%o10) $[\frac{2}{17},\frac{3}{17},\frac{6}{17},\frac{4}{17},\frac{2}{17}]$

/*

Der Erwartungswert (Notendurchschnitt)

(%i12) `m:sum(P[i]*X[i],i,1,n);`

(%o12) $\frac{52}{17}$

(%i14) `X1:(X-m)**2;`

(%o14) $[\frac{1225}{289},\frac{324}{289},\frac{1}{289},\frac{256}{289},\frac{1089}{289}]$

/*

Die Varianz

(%i15) `v:sum(P[i]*X1[i],i,1,n);`

(%o15) $\frac{390}{289}$

/*

Die Streuung

(%i17) `s:sqrt(v);`

(%o17) $\frac{\sqrt{390}}{17}$

/*

ADDITIONSSATZ der Wahrscheinlichkeitsrechnung

(%i19) `"W(A oder B) = W(A) + W(B)";`

(%o19) *W(A oder B) = W(A) + W(B)*

/*

Additionssatz auf eine Verteilung angewendet

(%i23) `'sum(W(x[k]),k,1,'n)=1;`

(%o23) $\sum_{k=1}^{n} W\left(x_k\right) = 1$

Merke: die Summe über eine vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung muss immer 1 sein (100%).

/*

Kumulierte Verteilung

(%i26) `W(x<=k)='sum(W(x[i]),i,1,k);`

(%o26) $W(x <= k) = \sum_{i=1}^{k} W(x_i)$

das braucht man bei vielen Aufgaben-
stellungen

/*

$\boxed{\text{WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN}}$

/*

Binomialverteilung

Parameter:
n (Umfang der Stichprobe)
p (zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit)

(%i1) `n;`

(%o1) n

(%i2) `p;`

(%o2) p

(%i3) `E:n*p;`

(%o3) $n\,p$

(%i4) `V:n*p*(1-p);`

(%o4) $n\,(1 - p)\,p$

(%i5) `W(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k);`

(%o5) $\boxed{W(k) := \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}}$

das ist die Formel für die
Binomialverteilung

/*

Poissonverteilung

Parameter: m=μ=E=V

(%i6) `m;`

(%o6) m

(%i7) `W(k):=m**k/k!*exp(-m);`

(%o7) $\boxed{W(k) := \frac{m^k}{k\,!} exp(- m)}$

das ist die Formel für die Poisson-
verteilung

/*

KOMPLEMENTÄREREIGNIS

(%i8) "W(A')=1-W(A)";

(%o8) W(A')=1-W(A)

"Sein oder nicht sein" ->
tertium non datur est

/*

DIFFERENTIALRECHNUNG

/*

Potenzregel

(%i9) f(x):=x**n;

(%o9) $f(x) := x^n$

(%i10) 'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);

(%o10) $\frac{d}{d\ x} x^n = n\ x^{n-1}$

Man ermittelt die Ableitung einer Potenz,
in dem man die Hochzahl um 1 vermindert und
mit der alten Hochzahl mutlipliziert

/*

Regel vom konstanten Faktor

(%i11) f(x):=c*u(x);

(%o11) $f(x) := c\ u(x)$

(%i12) 'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);

(%o12) $\frac{d}{d\ x}\left(c\ u(x)\right) = c \left(\frac{d}{d\ x} u(x)\right)$

ein konstanter Faktor bleibt beim
Differenzieren unverändert

/*

Summenregel

(%i13) f(x):=u(x)+v(x);

(%o13) $f(x) := u(x) + v(x)$

(%i14) 'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);

(%o14) $\frac{d}{d\ x}\left(v(x) + u(x)\right) = \frac{d}{d\ x} v(x) + \frac{d}{d\ x} u(x)$

/*

man bildet die Ableitung einer Summe, indem man
die Summe der Ableitungen bildet

Produktregel

(%i15) f(x):=u(x)*v(x);

(%o15) $f(x) := u(x)\, v(x)$

(%i16) `'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);`

(%o16) $\frac{d}{d\,x}\left(u(x)\, v(x)\right) = u(x)\left(\frac{d}{d\,x}v(x)\right) + v(x)\left(\frac{d}{d\,x}u(x)\right)$

/*

(f.g)'=f'.g+f.g'

Quotientenregel

(%i17) `f(x):=u(x)/v(x);`

(%o17) $f(x) := \frac{u(x)}{v(x)}$

(%i18) `'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);`

(%o18) $\frac{d}{d\,x}\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\frac{d}{d\,x}u(x)}{v(x)} - \frac{u(x)\left(\frac{d}{d\,x}v(x)\right)}{v(x)^2}$

(%i19) `factor(%);`

(%o19) $\frac{d}{d\,x}\frac{u(x)}{v(x)} = -\frac{u(x)\left(\frac{d}{d\,x}v(x)\right) - v(x)\left(\frac{d}{d\,x}u(x)\right)}{v(x)^2}$

/*

(f/g)'= (f'.g-f.g')/g²

INTEGRALRECHNUNG

Die Integralrechnung ist die Umkehrung der Differentialrechnung.

/*

Das unbestimmte Integral

(%i20) `f(x):=x**2;`

(%o20) $f(x) := x^2$

(%i22) `'integrate(f(x),x) = integrate(f(x),x);`

(%o22) $\int x^2\, d\,x = \frac{x^3}{3}$

/*

```
-----------------------
Das bestimmte Integral
-----------------------
```

(%i23) f(x):=x**2;

(%o23) $f(x) := x^2$

(%i24) a:0;

(%o24) 0

(%i25) b:1;

(%o25) 1

(%i26) 'integrate(f(x),x,a,b) = integrate(f(x),x,a,b);

(%o26) $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$

/*

KURVENDISKUSSION

/*

```
-----------
Nullstellen
-----------
```

/*

Die Nullstellen einer Funktion sind ihre Schnittpunkte mit der x-Achse

(%i1) f(x);

(%o1) $f(x)$

(%i2) solve(f(x)=0);

(%o2) $[\, f(x) = 0 \,]$

man braucht nur die reellen Lösungen

(%i3) realroots(f(x));

(%o3) $[\, f(x) = 0 \,]$

/*

```
-----------
Extremwerte
-----------
```

/*

Zuerst die x-Werte durch NULL-Setzen
der ersten Ableitung bestimmmen,
die Funktionswerte durch Rückeinsetzen
in f(x). Mittels der zweiten Ableitung
kann man dann entscheiden, ob ein
Maximum (Hochwert) oder ein
Minimum (Tiefwert) vorliegt.

Wenn die zweite Ableitung < 0 ist,
liegt ein Maximum vor, wenn die zweite
Ableitung > 0 ist, liegt ein Minimum
vor.

(%i5) ab:diff(f(x),x);

(%o5) $\frac{d}{d\,x} f(x)$

(%i6) solve(ab=0,x);

(%o6) $[\frac{d}{d\,x} f(x) = 0]$

(%i7) realroots(ab);

(%o7) $[\frac{d}{d\,x} f(x) = 0]$

/*

Wendepunkte

(%i8) ab2:diff(f(x),x,2);

(%o8) $\frac{d^2}{d\,x^2} f(x)$

(%i10) solve(ab2=0,x);

(%o10) $[\frac{d^2}{d\,x^2} f(x) = 0]$

(%i11) realroots(ab2);

(%o11) $[\frac{d^2}{d\,x^2} f(x) = 0]$

/*

Der Hauptzweck der Kurvendiskussion ist die
Erstellung einer grafischen Darstellung. Dazu
gibt es allerdings heute sehr gut geeignete
Programme.

/*

REGRESSION

/*

Lineare Regression

Hier sind die zwei Gleichungen, die man für eine lineare Regression braucht:

(%i12)

```
a*sum(x[i]**2,i,1,n)+b*sum(x[i],i,1,n)=sum(x[i]*y[i],i,1,n);
```

(%o12) $$a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

(%i13)

```
a*sum(x[i],i,1,n)+b*n = sum(y[i],i,1,n);
```

(%o13) $$b\,n + a\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

(%i14)

diese Gleichungen sind sehr einfach zu verwenden!

WEITERE REGRESSIONSFORMEN FUNKTIONIEREN ANALOG