Mittelwerte

Dokumentnummer: DX1227
Fachgebiet: Beschreibende Statistik, Funktionen,
Wirtschaftsrechnen, Finanzmathematik,
Wachstum
Einsatz: 2HAK (erstes Lernjahr)
Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Mittelwert

1 Das arithmetische Mittel

1.1 Aus Wikipedia

Das arithmetische Mittel wird beispielsweise zum Berechnen der Durchschnittsgeschwindigkeit genutzt:
Läuft eine Schildkröte erst drei Meter pro Stunde, dann drei Stunden lang je zwei Meter und beschleunigt
für jeweils eine Stunde nochmals auf drei, vier und fünf Meter pro Stunde, so ergibt sich als
arithmetisches Mittel:

Figure 1:

$$\bar{x}_{\mathrm{arithm}} = \frac{3+2+2+2+3+4+5}{7} = \frac{21\ \mathrm{m}}{7\ \mathrm{h}} = 3\ \mathrm{m/h}.$$

1.2 Lösung mit Maxima

```
--> v:[3,2,2,2,3,4,5];
(%o9) [3,2,2,2,3,4,5]

--> n:length(v);
(%o10) 7

--> ma:sum(v[i],i,1,n)/n;
(%o11) 3
```

2 Das harmonische Mittel

2.1 Aus Wikipedia

Auch das harmonische Mittel kann zur Berechnung einer durchschnittlichen Geschwindigkeit sinnvoll sein,
wenn nicht stündlich sondern nach Strecke gemessen wird: Die Schildkröte laufe den ersten Meter mit
drei Metern pro Stunde, weitere drei Meter mit jeweils 2 m/h und beschleunigt auf den letzten drei
Metern nochmals auf jeweils drei, vier und fünf m/h. Die Schildkröte braucht somit 157/60 Stunden für
sieben Meter, denn

Figure 2:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{157}{60}=\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{x_i}.$$

Daraus ergibt sich dann die Durchschnittsgeschwindigkeit von 2,68 Metern pro Stunde;

Figure 3:

$$\bar{x}_{\mathrm{harm}}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\frac{7}{\frac{157}{60}}\approx 2,68\mathrm{m/h}.$$

2.2 Lösung mit Maxima

```
--> v;
(%o12) [3,2,2,2,3,4,5]
```

```
--> kv:1/v;
```

(%o12) $[\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}]$

```
--> skv:sum(kv[i],i,1,n);
```

(%o14) $\frac{157}{60}$

```
--> mh:n/skv,numer;mh:floor(mh*100+0.5)/100.0;
(%o17) 2.67515923566879
(%o18) 2.68
```

3 Das geometrische Mittel

3.1 Aus Wikipedia

Mit dem geometrischen Mittel errechnet man den mittleren Wachstumsfaktor. Eine Bakterienkultur wachse
beispielsweise am ersten Tag um das Fünffache, am zweiten um das Vierfache, dann zweimal um das
Dreifache und die letzten drei Tage verdoppelt sie sich täglich. Der Bestand nach dem siebten Tag
errechnet sich also durch

Figure 4:

$$\boxed{\text{Anfangsbestand} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \text{Endbestand.}}$$

Alternativ kann mit dem geometrischen Mittel der Endbestand ermittelt werden, denn

Figure 5:

$$\boxed{\bar{x}_{\text{geom}} = \sqrt[7]{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[7]{1440} \approx 2,83}$$

und somit ist

Figure 6:

$$\boxed{\text{Anfangsbestand} \cdot \bar{x}_{\text{geom}}^7 = \text{Endbestand.}}$$

Ein tägliches Wachstum der Bakterienkultur um das 2,83-fache hätte also nach sieben Tagen
zum selben Ergebnis geführt.

3.2 Lösung mit Maxima

```
--> wachstum:[5,4,3,3,2,2,2];
(%o19) [5,4,3,3,2,2,2]
```

```
--> n:length(wachstum);
(%o21) 7
```

```
--> g1:Anfangsbestand*product(wachstum[i],i,1,n)=Endbestand;
 (%o24) 1440 Anfangsbestand =Endbestand
```

```
--> mg:product(wachstum[i],i,1,n)**(1/n);
```
(%o23) $1440^{1/7}$

```
--> g2:Anfangsbestand*mg**n=Endbestand;
 (%o25) 1440 Anfangsbestand =Endbestand
```

4 Lizenz

5 Übungsaufgaben

5.1 Durchschnittlicher Umsatz

In den ersten 6 Monaten des laufenden Geschäftsjahres wurden in der Boutique Martina
folgende Monatsumsätze erzielt:

Januar: .... 5 875,00 EUR,
Februar: .... 7 627,50 EUR,
März: .... 10 502,50 EUR,
April: .... 12 300,00 EUR,
Mai: .... 9 823,50 EUR,
Juni: .... 13 204,00 EUR.
Wie hoch war der durchschnittliche monatliche Umsatz?

```
--> umsatz:[5875,7627.50,10502.50,12300,9823.50,13204];
 (%o26) [5875,7627.5,10502.5,12300,9823.5,13204]
```

```
--> n:length(umsatz);
 (%o27) 6
```

```
--> dumsatz:sum(umsatz[i],i,1,n)/n;
 (%o29) 9888.75
```

5.2 Durchschnittliche Kundenzahl

Im Warenwirtschaftssystem des Lebensmittelmarktes "Natürlich Lungau" wird die Anzahl der
Kunden an den einzelnen Tagen einer Woche wie folgt ausgewiesen:
Montag = 765; Mittwoch = 783; Freitag = 1064;
Dienstag = 480; Donnerstag = 478; Samstag = 672.
Man berechne die durchschnittliche Kundenzahl je Arbeitstag!

```
--> kunden:[765,783,1064,480,478,672];
(%o30) [765,783,1064,480,478,672]
```

```
--> n:length(kunden);
(%o31) 6
```

```
--> dkunden:sum(kunden[i],i,1,n)/n;
(%o32) 707
```

5.3 Durchschnittlicher Lagerbestand

Wie hoch ist der durchschnittliche Lagerbestand des Lebensmittelmarktes Feinkost Weilharter im 1. Halbjahr bei folgenden Produkten:
Monat Artikel

Rindfleisch Rotwein Butter Eier

Januar 420 kg 120 Flaschen 345 Stück 35 Pack
Februar 390 kg 210 Flaschen 457 Stück 42 Pack
März 285 kg 165 Flaschen 321 Stück 57 Pack
April 425 kg 145 Flaschen 672 Stück 44 Pack
Mai 324 kg 95 Flaschen 210 Stück 23 Pack
Juni 289 kg 114 Flaschen 187 Stück 32 Pack

```
--> monat:[jan,feb,mar,apr,mai,jun];
(%o37) [jan,feb,mar,apr,mai,jun]
```

```
--> n:length(monat);
(%o38) 6
```

```
--> rindfleisch:[420,390,285,425,324,289];
rotwein:[120,210,165,145,95,114];
butter:[345,457,321,672,210,187];
```

eier:[35,42,57,44,23,32];

(%o33) [420,390,285,425,324,289]

(%o34) [120,210,165,145,95,114]

(%o35) [345,457,321,672,210,187]

(%o36) [35,42,57,44,23,32]

--> d(x):=sum(x[i],i,1,n)/n;

(%o44) $d(x) := \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

--> drindfleisch:d(rindfleisch),numer;

(%o45) 355.5

--> drotwein:d(rotwein),numer;

(%o46) 141.5

--> dbutter:d(butter),numer;

(%o47) 365.3333333333333

--> deier:d(eier),numer;

(%o48) 38.83333333333334

5.4 Harmonisches Mittel

Die halbe Strecke fährt ein Auto Tempo 50 und die andere Hälfte
im Schnitt Tempo 150, dann beträgt insgesamt die durchschnittliche
Geschwindigkeit nicht 100, sondern 75 km/h:

--> s:1/50+1/150;

(%o49) $\frac{2}{75}$

--> d:2/s;

(%o50) 75

5.5 Geometrisches Mittel

Nehmen wir an, die jährliche Inflationsrate hätte durch 10 Jahre jeweils hindurch jeweils 2% pro Jahr betragen. Hier wäre es falsch anzunehmen, dass die Inflation nach den 10 Jahren um 20% höher als davor liegt, da sich die Werte gegenseitig beeinflussen. Im ersten Jahr sind es 2% Inflation von 100%; im 2. Jahr 2% von 102% (also 2,04% Preissteigerung verglichen mit dem Ausgangsjahr), im 3. Jahr 2% von 104,04
(= 2,0808% vergleichen mit dem Ausgangsjahr).

```
(%i1) 1.02**10;
(%o1) 1.218994419994757
```

Die Inflation liegt um 21,9 % höher als zuvor.

```
(%i2) (1+21.9/100)**(1/10);
(%o2) 1.020000466908915
```

Umkehrung: die durchschnittliche jährliche Inflation ist 2 %

Created with wxMaxima.