

Infinitesimalrechnung

Dokumentnummer: DX1189

Quelle: Zentralabitur Teilaufgabe Bayern 1996

Abb. 1:

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

mit $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

--> $f(x) := (1 - \exp(2 \cdot x)) / (1 + \exp(2 \cdot x))$;

$$(\%01) \ f(x) := \frac{1 - \exp(2 \cdot x)}{1 + \exp(2 \cdot x)}$$

Abb. 2:

1. (a) Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f und das Verhalten von f für $x \rightarrow -\infty$.
- (b) Zeigen Sie, dass G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Geben Sie nun das Verhalten von f für $x \rightarrow +\infty$ an.
- (c) Zeigen Sie: $f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}$.
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f , und geben Sie die Wertemenge von f an.
- (d) Der Ursprung des Koordinatensystems ist Wendepunkt von G_f (Nachweis nicht verlangt).
Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente.
- (e) Berechnen Sie $f(1)$ auf zwei Dezimalen genau. Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm).

Infinitesimalrechnung

Abb. 3:

(a) Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f und das Verhalten von f für $x \rightarrow -\infty$.

```
--> l:solve(f(x)=0,x);
```

```
(%o11) [x = log(-1), x = 0]
```

die erste Lösung gilt nur im Bereich der komplexen Zahlen

```
--> x1:x,[1];x1:x1,lognegint;
```

```
(%o15) log(-1)
```

```
(%o16) %i pi
```

die einzige Nullstelle ist

```
--> x2:x,[2];
```

```
(%o17) 0
```

Verhalten in den Randbereichen

```
--> o:limit(f(x),x,inf);
```

```
(%o18) -1
```

```
--> u:limit(f(x),x,minf);
```

```
(%o19) 1
```

```
--> wxplot2d([f(x)], [x,-5,5])$
```

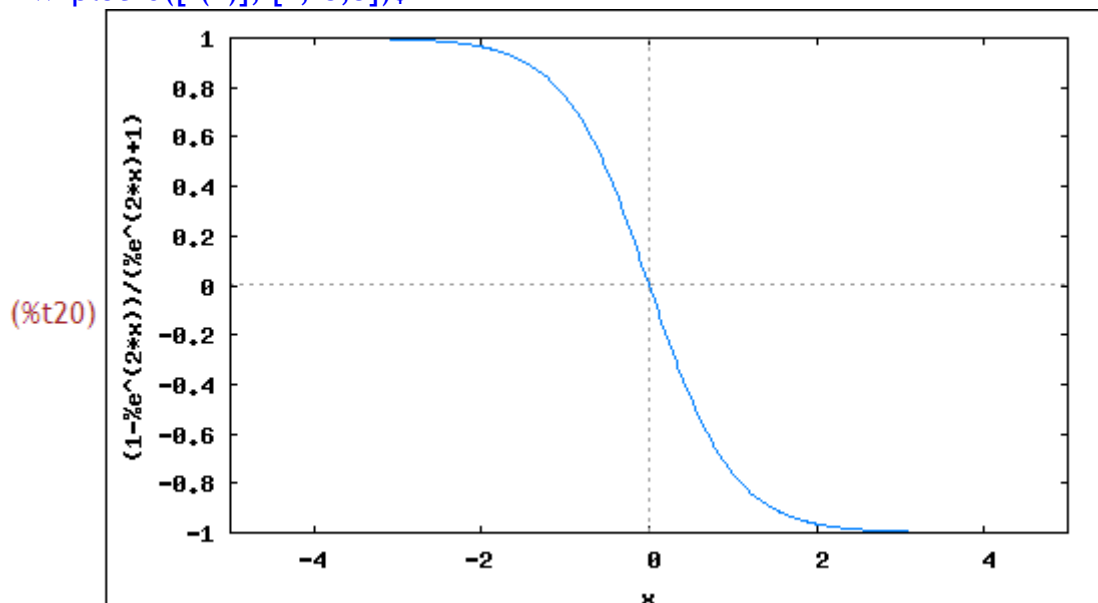


Abb. 4:

(b) Zeigen Sie, dass G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Geben Sie nun das Verhalten von f für $x \rightarrow +\infty$ an.

--> `beweis:f(-x)=-f(x);`

$$(\%032) \frac{1 - e^{-2x}}{e^{-2x} + 1} = -\frac{1 - e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

--> `beweis:beweis-rhs(beweis),ratsimp;`

$$(\%033) 0 = 0$$

Rest siehe unter (a)

Abb. 5:

(c) Zeigen Sie: $f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}$.

Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f , und geben Sie die Wertemenge von f an.

--> `ab:diff(f(x),x),ratsimp;`

$$(\%035) -\frac{4 e^{2x}}{e^{4x} + 2 e^{2x} + 1}$$

--> `ab:ab,factor;`

$$(\%036) -\frac{4 e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

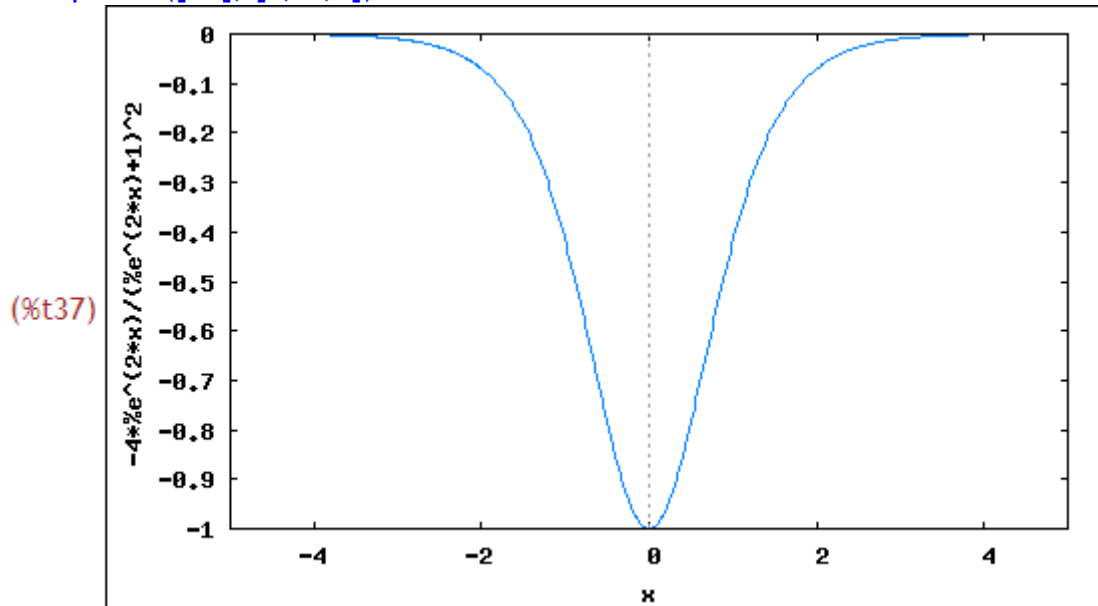
--> `og:limit(ab,x,inf);`

$$(\%038) 0$$

--> `ug:limit(ab,x,minf);`

$$(\%039) 0$$

```
--> wxplot2d([ab], [x,-5,5])$
```



Die Funktion ist wohl im ganzen Bereich streng monoton fallend

Abb. 6:

(d) Der Ursprung des Koordinatensystems ist Wendepunkt von G_f (Nachweis nicht verlangt).
Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente.

```
--> ab2:diff(f(x),x,2),ratsimp;
```

(%o41)
$$\frac{8 e^{4x} - 8 e^{2x}}{e^{6x} + 3 e^{4x} + 3 e^{2x} + 1}$$

```
--> ab2:ab2,factor;
```

(%o42)
$$\frac{8 (e^x - 1) (e^x + 1) e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^3}$$

```
--> l:solve(ab2=0,x);
```

(%o43) $[x = \log(-1), x = 0, e^x = 0]$

```
--> xw:x,l[2];
```

(%o45) 0

```
--> yw:f(xw);
```

(%o46) 0

```
--> kw:ab,x=xw;
```

```
(%o47) -1
```

```
--> wt:y=k*x+d,k=kw;
```

```
(%o48)  $y = d - x$ 
```

```
--> wt;
```

```
(%o49)  $y = d - x$ 
```

```
--> wt,x=xw,y=yw;
```

```
(%o50)  $0 = d$ 
```

Die Wendetangente ist $y = -x$

Abb. 7:

(e) Berechnen Sie $f(1)$ auf zwei Dezimalen genau. Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm).

```
--> y1:f(1),numer;y1:floor(y1*100+0.5)/100.0;
```

```
(%o56) -0.76159415595576
```

```
(%o57) -0.76
```

```
--> wxplot2d([f(x),-x], [x,-2,2], [y,-2,2])$
```

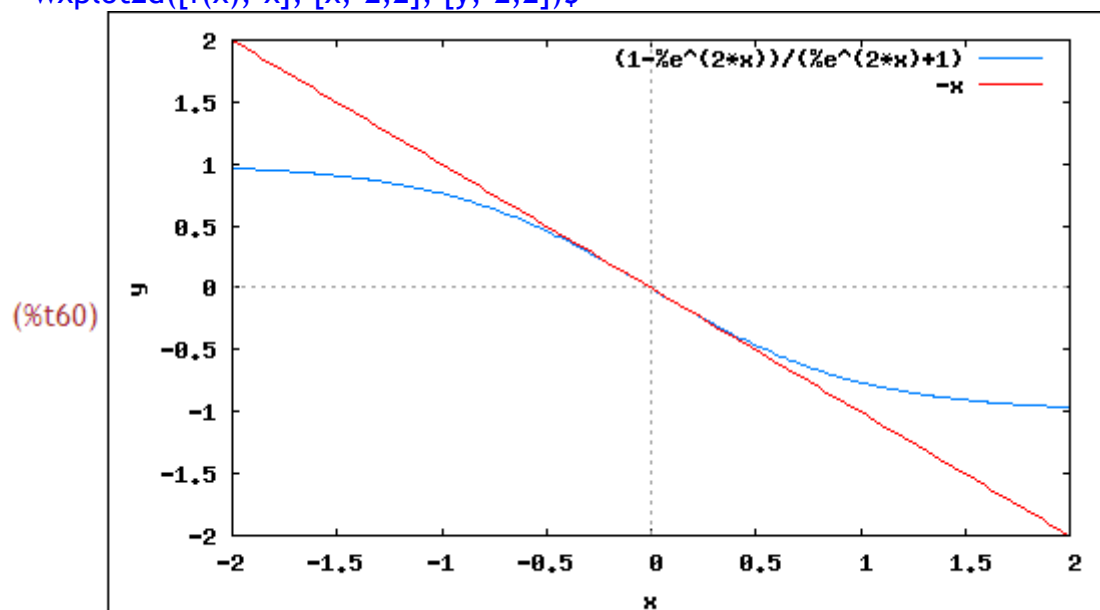


Abb. 8:

2. Begründen Sie, dass f umkehrbar ist.

Bestimmen Sie für die Umkehrfunktion f^{-1} Funktionsterm, Definitions- und Wertemenge. Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion $G_{f^{-1}}$ in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1e ein.

Die Funktion ist umkehrbar, weil sie streng monoton fallend ist.

--> f(x);

$$(\%061) \frac{1 - e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

--> g:y=f(x);

$$(\%062) y = \frac{1 - e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

--> l:solve(g,x);

$$(\%063) \left[x = \log\left(-\sqrt{\frac{1-y}{y+1} - \frac{y}{y+1}}\right), x = \frac{\log\left(\frac{1-y}{y+1} - \frac{y}{y+1}\right)}{2} \right]$$

--> x1:x,[2];x1:x1,y=x;

$$(\%068) \frac{\log\left(\frac{1-y}{y+1} - \frac{y}{y+1}\right)}{2}$$

$$(\%069) \frac{\log\left(\frac{1-x}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right)}{2}$$

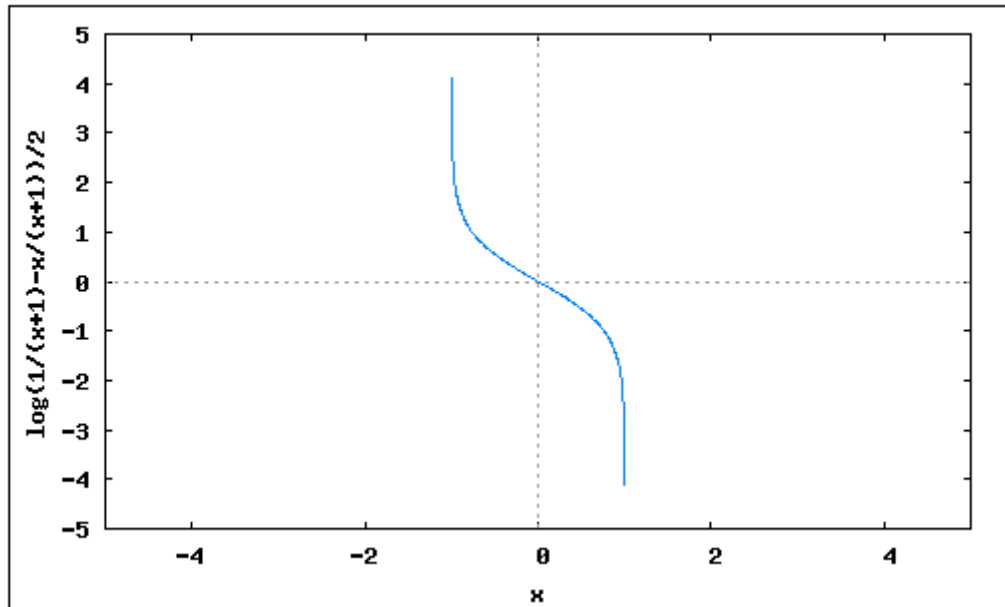
--> u(x):="x1";

$$(\%072) u(x) := \frac{\log\left(\frac{1-x}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right)}{2}$$

--> wxplot2d([u(x)], [x,-5,5])\$

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

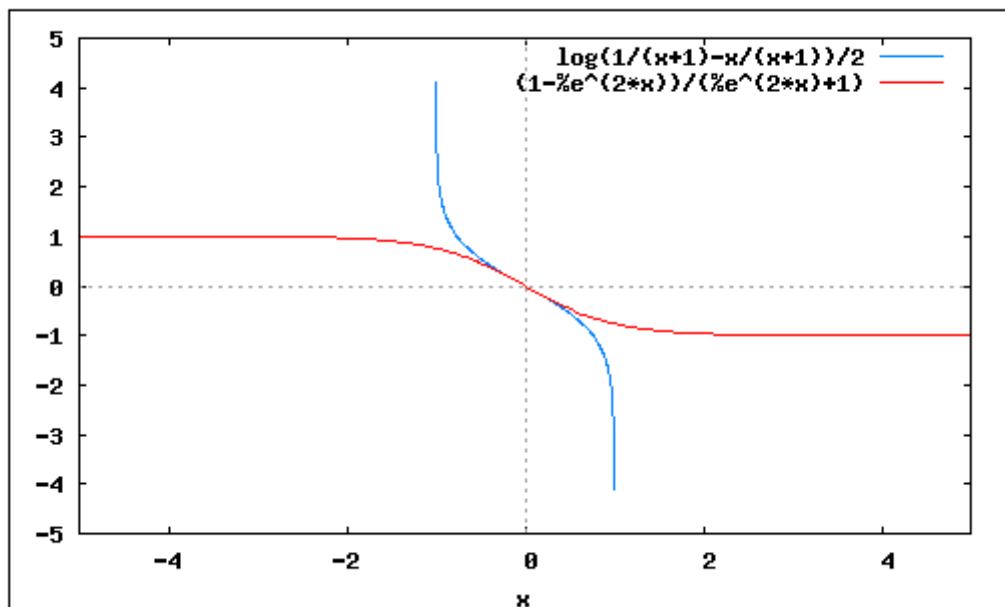
(%t73)



--> wxplot2d([u(x),f(x)], [x,-5,5])\$

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

(%t74)



```
--> z:num(x1);
```

```
(%o75) log( $\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x+1}$ )
```

Definitionsmenge: $x = 1$ und $x = -1$ sind Pole (d.h. von der Definitionsmenge ausgenommen)

Wertemenge: $] -1, 1[$

```
--> n:denom(x1);
```

```
(%o76) 2
```

Abb. 9:

3. (a) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto x - \ln(1 + e^{2x})$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

(b) Berechnen Sie $J = \int_{-1}^0 f(x) dx$ auf drei Dezimalen genau.

(c) G_f , $G_{f^{-1}}$ und die Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $y = 1$ begrenzen im II. Quadranten ein Flächenstück.

Berechnen Sie dessen Inhalt auf zwei Dezimalen genau.

Abb. 10:

(a) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto x - \ln(1 + e^{2x})$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

```
--> F:integrate(f(x),x);
```

```
(%o78) x - log(%e2x + 1)
```

Abb. 11:

(b) Berechnen Sie $J = \int_{-1}^0 f(x) dx$ auf drei Dezimalen genau.

```
--> J:integrate(f(x),x,-1,0);
```

```
(%o82) log(%e-2 (%e2 + 1)) - log(2) + 1
```

```
--> J:floor(J*1000+0.5)/1000.0;
```

```
(%o83) 0.434
```

Abb. 12:

(c) G_f , $G_{f^{-1}}$ und die Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $y = 1$ begrenzen im II. Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Inhalt auf zwei Dezimalen genau.

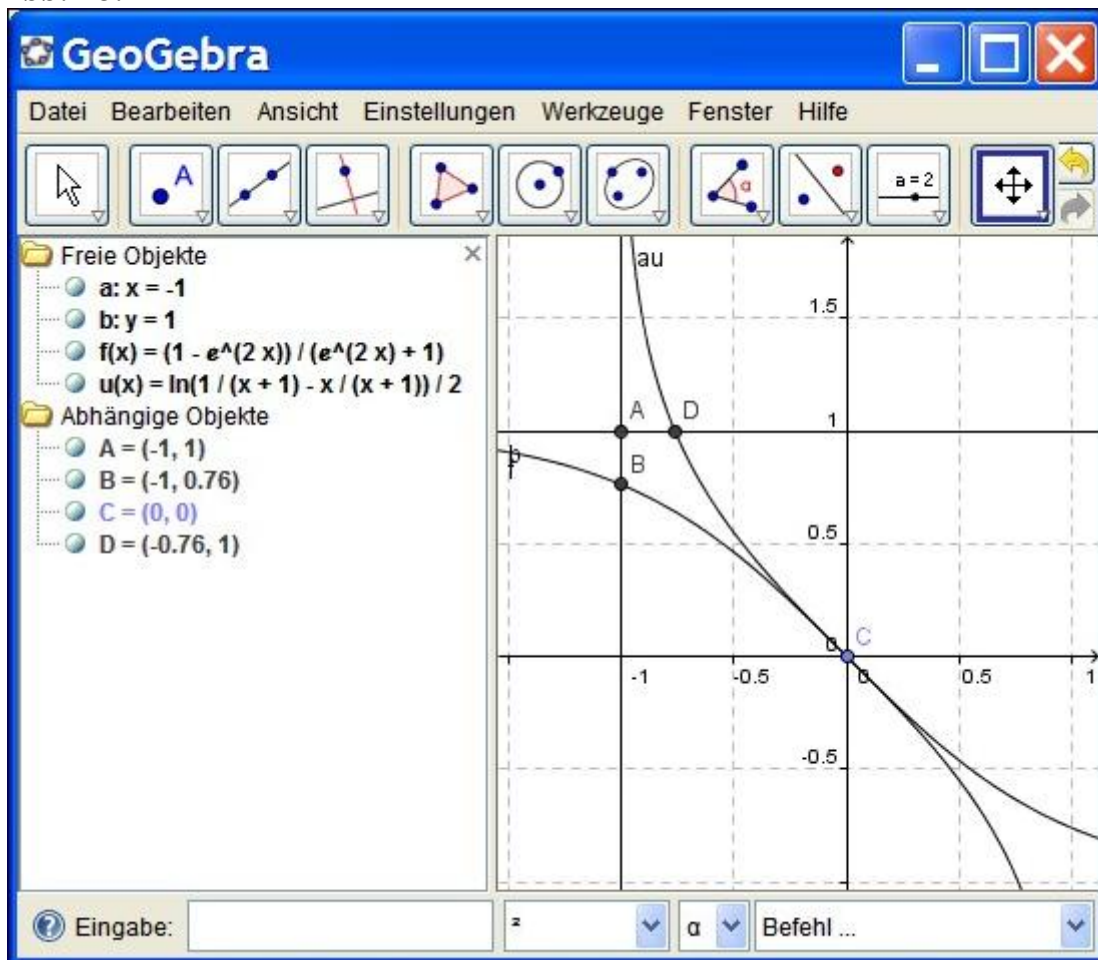
--> $f(x)$;

$$(\%085) \frac{1 - e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

--> $u(x)$;

$$(\%086) \frac{\log\left(\frac{1-x}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right)}{2}$$

Abb. 13:



Infinitesimalrechnung

--> g:solve(u(x)=1,x);

$$(\%092) [x = -\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}]$$

--> xd:x,g;

$$(\%093) -\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$$

--> Fl1:integrate(1,x,-1,xd);

$$(\%094) 1 - \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$$

--> Fl2:integrate(u(x),x,xd,0);

$$(\%099) \frac{(e^2 + 1) \log\left(\frac{2e^2}{e^2 + 1}\right) + (e^2 + 1) \log\left(\frac{2}{e^2 + 1}\right) + 2e^2 - 2}{2(e^2 + 1)}$$

--> Fl3:integrate(f(x),x,-1,0);

$$(\%100) \log(e^{-2}(e^2 + 1)) - \log(2) + 1$$

--> Fl:Fl1+Fl2-Fl3;

$$(\%101) -\log(e^{-2}(e^2 + 1)) + \frac{(e^2 + 1) \log\left(\frac{2e^2}{e^2 + 1}\right) + (e^2 + 1) \log\left(\frac{2}{e^2 + 1}\right) + 2e^2 - 2}{2(e^2 + 1)} + \log(2) - \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$$

--> Fl:floor(Fl*100+0.5)/100.0;

$$(\%102) 0.13$$

Created with [wxMaxima](#).