Pascalsches Dreieck

1 Problembeschreibung

****
Dokumentnummer:D1352
****

BINOMIALKOEFFIZIENTEN

Aus der Kombinatorik kennen wir:
1.) das fundamentale Abzählprinzip
2.) die Anzahl der Permutationen (=verschiedene Anordnungen) einer Menge mit n Elementen ist n!

Im folgenden betrachten wir die Menge aller Teilmengen, das ist die Potenzmenge (powerset)

2 Problemlösung

```
(%i70) m:10 /* Dieser Wert kann verändert werden
      -> Mächtigkeit der Menge */;
(%o70) 10

(%i71) A[0]:{};
(%o71) {}

(%i72) powerset(A[0]);
(%o72) {{}}
```

Eine Menge mit 0 Elementen hat 1 Teilmenge mit 0 Elementen

```
(%i73) A[1]:{a};
(%o73) {a}

(%i74) powerset(A[1]);
(%o74) {{},{a}}
```

Eine Menge mit 1 Element hat 1 Teilmenge mit 0 Elementen und 1 Teilmenge mit 1 Element

```
(%i75) A[2]:{a,b};
(%o75) {a,b}

(%i76) powerset(A[2]);
(%o76) {{},{a},{a,b},{b}}
```

Eine Menge mit 2 Elementen hat 1 Teilmenge mit 0 Elementen, 2 Teilmengen mit 1 Element und 1 Teilmenge mit 2 Elementen

(%i77) A[3]:{a,b,c};

(%o77) {a,b,c}

(%i78) powerset(A[3]);

(%o78) {{},{a},{a,b},{a,b,c},{a,c},{b},{b,c},{c}}

Eine Menge mit 3 Elementen hat:
1 Teilmenge mit 0 Elementen,
3 Teilmengen mit 1 Element,
3 Teilmengen mit 2 Elementen und
1 Teilmenge mit 3 Elementen.

(%i79) A[4]:{a,b,c,d};

(%o79) {a,b,c,d}

(%i80) powerset(A[4]);

(%o80) {{},{a},{a,b},{a,b,c},{a,b,c,d},{a,b,d},{a,c},{a,c,d},{a,d},{b},{b,c},{b,c,d},{b,d},{c},{c,d},{d}}

Eine Menge mit 4 Elementen hat:
1 Teilmenge mit 0 Elementen,
4 Teilmengen mit 1 Element,
6 Teilmengen mit 2 Elementen,
4 Teilmengen mit 3 Elementen und
1 Teilmenge mit 4 Elementen.

(%i81) A[5]:{a,b,c,d,e};

(%o81) {a,b,c,d,e}

(%i82) powerset(A[5]);

(%o82) {{},{a},{a,b},{a,b,c},{a,b,c,d},{a,b,c,d,e},{a,b,c,e},{a,b,d},{a,b,d,e},{a,b,e},{a,c},{a,c,d},{a,c,d,e},{a,c,e},{a,d},{a,d,e},{a,e},{b},{b,c},{b,c,d},{b,c,d,e},{b,c,e},{b,d},{b,d,e},{b,e},{c},{c,d},{c,d,e},{c,e},{d},{d,e},{e}}

Eine Menge mit 5 Elementen hat
1 Teilmenge mit 0 Elementen,
5 Teilmengen mit 1 Element,
10 Teilmengen mit 2 Elementen,
10 Teilmengen mit 3 Elementen,
5 Teilmengen mit 4 Elementen und
1 Teilmenge mit 5 Elementen.

(%i83) Maechtigkeit_der_Potenzmengen:makelist(2**n,n,0,5);

(%o83) [1,2,4,8,16,32]

Merke: die Mächtigkeit der Potenzmenge einer Menge von n Elementen ist 2**n

(%i84) f(n):=(a+b)**n;

(%o84) $f(n):=(a+b)^n$

(%i85) makelist(f(n),n,0,m);

(%o85) $[1,b+a,(b+a)^2,(b+a)^3,(b+a)^4,(b+a)^5,(b+a)^6,(b+a)^7,(b+a)^8,(b+a)^9,(b+a)^{10}]$

(%i86) expand(%);

(%o86) $[1,b+a,b^2+2\,a\,b+a^2,b^3+3\,a\,b^2+3\,a^2\,b+a^3,b^4+4\,a\,b^3+6\,a^2\,b^2+4\,a^3\,b+a^4,b^5+5\,a\,b^4+10\,a^2\,b^3+10\,a^3\,b^2+5\,a^4\,b+a^5,b^6+6\,a\,b^5+15\,a^2\,b^4+20\,a^3\,b^3+15\,a^4\,b^2+6\,a^5\,b+a^6,b^7+7\,a\,b^6+21\,a^2\,b^5+35\,a^3\,b^4+35\,a^4\,b^3+21\,a^5\,b^2+7\,a^6\,b+a^7,b^8+8\,a\,b^7+28\,a^2\,b^6+56\,a^3\,b^5+70\,a^4\,b^4+56\,a^5\,b^3+28\,a^6\,b^2+8\,a^7\,b+a^8,b^9+9\,a\,b^8+36\,a^2\,b^7+84\,a^3\,b^6+126\,a^4\,b^5+126\,a^5\,b^4+84\,a^6\,b^3+36\,a^7\,b^2+9\,a^8\,b+a^9,b^{10}+10\,a\,b^9+45\,a^2\,b^8+120\,a^3\,b^7+210\,a^4\,b^6+252\,a^5\,b^5+210\,a^6\,b^4+120\,a^7\,b^3+45\,a^8\,b^2+10\,a^9\,b+a^{10}]$

(%i87) transpose(%);

(%o87)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ b+a \\ b^2+2\,a\,b+a^2 \\ b^3+3\,a\,b^2+3\,a^2\,b+a^3 \\ b^4+4\,a\,b^3+6\,a^2\,b^2+4\,a^3\,b+a^4 \\ b^5+5\,a\,b^4+10\,a^2\,b^3+10\,a^3\,b^2+5\,a^4\,b+a^5 \\ b^6+6\,a\,b^5+15\,a^2\,b^4+20\,a^3\,b^3+15\,a^4\,b^2+6\,a^5\,b+a^6 \\ b^7+7\,a\,b^6+21\,a^2\,b^5+35\,a^3\,b^4+35\,a^4\,b^3+21\,a^5\,b^2+7\,a^6\,b+a^7 \\ b^8+8\,a\,b^7+28\,a^2\,b^6+56\,a^3\,b^5+70\,a^4\,b^4+56\,a^5\,b^3+28\,a^6\,b^2+8\,a^7\,b+a^8 \\ b^9+9\,a\,b^8+36\,a^2\,b^7+84\,a^3\,b^6+126\,a^4\,b^5+126\,a^5\,b^4+84\,a^6\,b^3+36\,a^7\,b^2+9\,a^8\,b+a^9 \\ b^{10}+10\,a\,b^9+45\,a^2\,b^8+120\,a^3\,b^7+210\,a^4\,b^6+252\,a^5\,b^5+210\,a^6\,b^4+120\,a^7\,b^3+45\,a^8\,b^2+10\,a^9\,b+a^{10} \end{bmatrix}$$

Hier den Zusammenhang mit oben klären: Binomialkoeffizienten!

(%i88) f(n,k):=binomial(n,k);

(%o88) $f(n,k):=\binom{n}{k}$

(%i89) g(n):=makelist(f(n,k),k,0,n);

(%o89) $g(n):=\mathrm{makelist}(f(n,k),k,0,n)$

(%i90) makelist(g(n),n,0,m);

(%o90) [[1],[1,1],[1,2,1],[1,3,3,1],[1,4,6,4,1],[1,5,10,10,5,1],[1,6,15,20,15,6,1],[1,7,21,35,35,21,7,1],[1,8,28,56,70,56,28,8,1],[1,9,36,84,126,126,84,36,9,1],[1,10,45,120,210,252,210,120,45,10,1]]

(%i91) transpose(%);

(%o91)
$$\begin{bmatrix} [1] \\ [1,1] \\ [1,2,1] \\ [1,3,3,1] \\ [1,4,6,4,1] \\ [1,5,10,10,5,1] \\ [1,6,15,20,15,6,1] \\ [1,7,21,35,35,21,7,1] \\ [1,8,28,56,70,56,28,8,1] \\ [1,9,36,84,126,126,84,36,9,1] \\ [1,10,45,120,210,252,210,120,45,10,1] \end{bmatrix}$$

Das ist das sogenannte Pascalsche Dreieck

Created with wxMaxima.